institut de
recherche sur
l'économie de
l'éducation
centre national de la
recherche scientifique

bernard fustier

LOCALISATION OPTIMALE DES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES

application des méthodes d'analyse multicritère au regroupement des écoles primaires rurales

faculté de science économique et de gestion
4, boulevard gabriel 21 dijon tél. (80) 30 66 42

institut de
recherche sur
l'économie de
l'éducation

bernard fustier

LOCALISATION OPTIMALE DES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES

application des méthodes d'analyse multicritère au regroupement des écoles primaires rurales

faculté de science économique et de gestion

4, boulevard gabriel 21 dijon tél. (80) 30 66 42

LOCALISATION OPTIMALE

DES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES

APPLICATION DES METHODES D'ANALYSE MULTICRITERE

AU REGROUPEMENT DES ECOLES PRIMAIRES RURALES

février 1973

INTRODUCTION

Nous nous proposons de cerner le sujet en répondant à cinq questions.

- Pourquoi effectuer un regroupement des écoles primaires rurales ?

A l'heure actuelle, l'exode rural provoque une diminution des effectifs et dans de nombreux cas, l'école d'une commune rurale ne possède qu'une seule classe pour des élèves d'âges et de niveaux différents. La qualité de l'enseignement et donc, l'avenir scolaire des enfants, sont gravement compromis.

Pour remédier à cette situation pédagogique défavorable, une solution très simple consiste à fermer une école dont l'effectif est inférieur à un certain plancher, les élèves étant scolarisés à l'école la plus proche de leur commune. Reste à prouver que la situation pédagogique se trouve améliorée par le regroupement de deux écoles. D'autre part, la mise en place d'un ramassage scolaire et la création d'une cantine sont souvent nécéssaires.

En 1968, une étude élaborée dans le cadre de l'Institut d'Economie Régionale (1) présente un modèle de regroupement systématique des écoles primaires rurales, afin de permettre la mise en place d'une infrastructure scolaire rationnelle. L'étude 1968 (2) envisage deux types de regroupement : dans une première solution, le regroupement s'effectue dans une seule commune, la commune d'accueil. Dans une deuxième solution, chaque commune conserve une ou plusieurs classes homogènes chargées d'accueillir les élèves des autres lieux, c'est le type de regroupement en communes spécialisées.

---

(1) I.E.R. - "Rapport sur un regroupement systématique des écoles primaires rurales" - 2 volumes.

(2) Pour plus de commodité, nous emploierons cette expression au lieu de citer chaque fois l'ouvrage mentionné ci-dessus.

- Quel type de regroupement allons-nous considérer ?

Nous retiendrons la solution de la commune d'accueil pour trois raisons :

. C'est la solution qui semble à l'heure actuelle, intéresser le plus le Ministère de l'Education Nationale.

. C'est le type de regroupement qui se prête le mieux aux méthodes que nous utiliserons.

. Il semble que cette solution entraîne des avantages pédagogiques supérieurs à ceux que pourraient procurer le regroupement en communes spécialisées. Nous les montrerons au cours du deuxième chapitre (section 1). Cependant, les auteurs de l'étude 1968 affirment que cette formule peut entraîner de graves inconvénients à la suite de la fermeture de certaines écoles (1) : " une telle mesure créerait de graves remous ... ceci n'est pas sans poser de graves problèmes dont les incidences politiques sont évidentes".

Toutefois, dans la présente étude, nous supposerons que les autorités locales adoptent une attitude rationnelle eu égard aux conséquences pédagogiques impliquées par le regroupement. Cette hypothèse semble fondée, tout du moins pour les communes visitées qui feront l'objet du regroupement.

Toutefois, si le fait de ne pas choquer les susceptibilités locales se voulait un critère extrêmement important, il aurait été facile de l'intégrer. Certaines méthodes notamment Electre -I tiennent compte des facteurs qualitatifs, pourquoi pas le facteur "prépondérance politique de la commune envisagée" ?

- Comment allons-nous réaliser le regroupement ?

L'étude 1968 propose une évaluation très détaillée des coûts que l'application d'un tel regroupement peut entraîner, mais le choix de la commune

(1) C.f. pages 10 et 11.

d'accueil reste une méthode très "simple" (1) puisqu'il est basé sur deux critères : les "effectifs existants" et le "réseau routier existant".

Dans cette présente étude, le choix de la commune d'accueil sera fondé sur un nombre supérieur de critères, d'où l'emploi des méthodes d'analyse multicritère, mais le coût impliqué par le regroupement ne fera pas l'objet d'une évaluation, ce qui rendra notre analyse (2) encore plus simple. Notons bien que la première étude considère un problème unidimensionnel, obligation lui est faite de fondre les critères en un seul : le coût. Au contraire, certaines de nos méthodes par exemple Electre I, écarteront volontairement ce cas pour ne considérer qu'un problème multidimensionnel où l'intégrité de chaque critère sera conservée. En conséquence la réduction au dénominateur commun "coût" ne s'impose pas.

Bien évidemment il aurait été possible qu'une étude préalable évalue le coût du regroupement si telle commune avait été choisie pour assurer le rôle de commune d'accueil. En faisant de même pour chaque lieu de l'ensemble concerné, on les classerait ensuite suivant le critère "coût", ce dernier étant un point de vue particulier parmi un ensemble de critères.

Précisons toutefois que si notre analyse écarte l'optique évaluation, cela ne signifie pas que le choix de la commune d'accueil sera fait sans aucune considération du coût. Au contraire, il constitue un des objectifs de la "fonction implicite" (cf. Chapitre 2-section 1). Nous verrons comment certains critères en tiennent compte sans que cela implique une évaluation monétaire.

---

(1) cf. Page 9

(2) A partir de maintenant, le terme "analyse" désigne la procédure de choix de la commune d'accueil menée à partir des méthodes d'analyse multicritère.

- A quel niveau devra se situer l'analyse ?

Plus le niveau est élevé, plus les problèmes sont difficiles à résoudre ; aussi est-il parfois sage de limiter l'étude à un niveau de généralité plus faible que celui qu'il serait idéalement souhaitable de retenir " (1) c'est à dire considérer le problème du regroupement dans toutes les zones rurales où il se pose, le transposer dans l'espace national. Nous limiterons notre étude à un niveau beaucoup moins élevé.

Malgré tout nous pensons que le problème d'ensemble ne peut être appréhendé que par la résolution successive de problèmes particuliers comme celui que nous allons présenter. Pour utiliser les techniques multicriteres il convient d'établir préalablement une partition sur l'espace national et mener autant de fois l'analyse qu'il y a de sous-ensembles d'écoles à regrouper. Le cadre de la présente analyse peut être considéré comme un de ces sous-ensembles.

- Existe-t-il une méthodologie de la participation à la décision ?

Robert M. Atkins esquisse une méthodologie de la participation à la décision (2) en nous indiquant les personnes qui sont concernées, celles qui sont associées, les rapports qui existent (ou qui devraient exister) entre le décideur (ou le centre de décision - "Top management") et l'expert chargé de l'étude etc...

Cette manière de procéder est beaucoup trop ambitieuse pour notre étude où celui qui en est chargé se confond avec le décideur.

---

(1) J. ANTOINE et B. ROY " Les techniques préparatoires de la décision intérêt et limites" op. cit. p. 272. Revue Projet -mars 1969-

(2) Robert M. ATKINS " A program for locating the new plant" - Harvard Business Review -nov-déc. 1952 - p. 113 à 121.

L'analyse du processus par lequel le centre de décision choisit effectivement est exclue du cadre de notre exposé. L'optique choisie est très différente puisque le chargé d'étude se permettra au moment venu d'associer certaines personnes à l'analyse : l'élaboration des critères et la détermination des poids relatifs à ceux-là.

Afin d'améliorer la qualité de l'enseignement dans les zones rurales et pour éviter l'établissement anarchique des circuits de ramassage en fonction des fermetures successives des écoles, nous allons procéder à un regroupement type. Le cadre de l'analyse une fois défini, celle-ci consiste grâce à l'emploi de méthodes multicritères à <u>sélectionner</u> (par simple dichotomie), la commune d'accueil ou à <u>classer</u> les lieux de "l'espace cadre d'analyse", le premier de la liste étant tetenu pour assurer ce rôle.

Le problème général ainsi posé, nous voyons d'ores et déjà le déroulement de sa résolution.

- <u>1 ère partie</u> : la préparation de l'analyse, c'est-à-dire l'élaboration d'un cadre (chapître 1) qui nous fournira les lieux à regrouper et la recherche des éléments qui constitueront les informations nécessaires aux méthodes d'analyse multicritère (chapître 2).

- <u>2 ème partie</u> : l'analyse ; elle concerne le choix de la commune d'accueil par les méthodes multicritères qui seront présentées au chapître introductif de cette seconde partie.

La deuxième partie dépend logiquement de la première : la commune d'accueil sera choisie en fonction de l'importance de critères élaborés eux-mêmes en fonction d'une école que nous estimons "idéale". Autrement dit, la commune d'accueil sera celle, parmi les lieux considérés, qui se rapprochera le plus de cet idéal.

En conséquence, le lien qui unit les deux parties de ce présent mémoire, n'est pas empreint d'une rigueur extrême puisqu'il suffira de changer "l'idéal" pour obtenir des résultats différents tout en conservant les méthodes d'analyse multicritère.

SOMMAIRE

Première partie

LA PREPARATION DE L'ANALYSE

Deuxième partie

L'ANALYSE

Première Partie

LA PREPARATION DE L'ANALYSE

CHAPITRE 1 : LE CADRE DE L'ANALYSE

Poser le problème et le résoudre, tel est le plan que nous suivrons ici.

Les données du problème sont peu nombreuses, la solution est donc simple. Mais toute la difficulté réside dans la façon de combiner les données afin de les ramener à un problème unidimensionnel.

Quelques aspects de l'école "idéale" seront abordés dans ce présent chapitre, en particulier sa capacité d'accueil. Cependant, la méthode que nous proposerons pour déterminer le cadre de l'analyse ne perdra pas de sa généralité quand bien même les chiffres que nous avançons à propos des effectifs ne correspondent pas à l'idéal de chacun.

SECTION 1 : Position du problème

Dans les deux paragraphes à venir nous nous proposons d'examiner la nature du problème à résoudre et de présenter les données qu'il nécéssite.

-1 La nature du problème :

1. Soit E un ensemble de communes et de hameaux possèdant ou non une école primaire.

$E = (1, 2, \ldots i, \ldots, n)$

1.1. C'est un ensemble fini pouvant atteindre une taille assez importante. A la limite, il peut coïncider avec l'espace national. Cependant, les considérations d'ordre pratique nous ont amené à travailler sur un ensemble beaucoup plus réduit : le canton.

Plus précisément, le canton dont il s'agit est celui d'Arnay-le-duc (1). La raison de notre choix est simple : les effectifs des écoles de ce canton sont assez faibles et bientôt se posera le problème auquel nous devons justement répondre : comment envisager un regroupement d'écoles primaires et le conduire à bien ?

1.2. Etant donné cet ensemble, il convient tout d'abord d'effectuer des regroupements parmi les éléments. Nous laissons à un stade ultérieur de l'analyse le problème du choix d'un élément (la commune d'accueil) au sein de chaque regroupement ainsi constitué.

2. Quelle que soit la méthode utilisée pour la constitution de ces regroupements, elle ne devra pas omettre la présence de deux contraintes que nous esquissons dès maintenant.

La première concerne le ramassage scolaire : un regroupement devra posséder une dimension raisonnable. Autrement dit, le nombre d'éléments qui le constituent ne devra pas imposer le trans port d'une quantité trop importante d'élèves pendant un temps trop long.

La seconde est relative à l'effectif : la taille d'un regroupement sera également dictée par la population scolarisable de ses éléments. En effet, regrouper deux éléments possèdant chacun un effectif très faible, nous permettrait d'avoir un effectif total un peu plus grand, mais sans que l'organisation de l'enseignement en soit véritablement améliorée. Inversement, une taille trop importante conduisant àun effectif total considérable, n'améliorerait certainement pas la situation. Entre autre, la première contrainte serait inévitablement enfreinte. En tout état de cause, le problème à résoudre est le suivant :

3. Comment déterminer des sous-ensembles de E, lesquels nous serviraient comme cadre afin de choisir pour chacun, une commune d'accueil ? D'une façon plus rigoureuse le problème revient à effectuer une partition sur E puisque tous ses éléments sont pris en compte ; tout élément devra appartenir à un sous-ensemble de E et à un seul.

(1) Arnay-le-duc : arrondissement de Beaune (Côte d'Or).

Ayant dégagé les grandes lignes du problème , il convient maintenant d'en préciser le contenu.

-2 .Les données du problème :

Rappelons que la solution devra tenir compte des deux contraintes précédemment évoquées. La méthode que nous proposerons dans la section suivante, résulte de l'interrelation de deux indices, chacun reflètant l'une de ces contraintes. Après la présentation du graphe qui nous servira à donner les valeurs aux indices, nous tenterons de définir ceux-ci dans un deuxième point.

A) Le graphe de départ G

Nous commencerons par définir très brièvement et donc imparfaitement, le graphe G comme étant le couple constitué par les deux ensembles E et U.

1° E est l'ensemble des communes et des hameaux du canton d'Arnay-le-duc. Plus précisément, nous avons rattaché le hameau à sa commune lorsqu'il était situé à moins de deux kilomètres de cette dernière et lorsque sa population scolarisable ne dépassait pas un élève. Dans tous les autres cas, nous distinguons hameau et commune, le premier pouvant tout aussi bien prétendre à la fonction de "lieu" d'accueil que la seconde. La définition des éléments de l'ensemble E qui constituent les sommets du graphe étant brièvement posée, trois remarques nous aideront à la préciser.

REMARQUE 1: Tous les lieux rencontrés sont indicés de la manière suivante : le premier reçoit l'indice 1, le second l'indice 2 etc... L'opération commence au Nord-Ouest du canton et se poursuit en le balayant de l'Ouest vers l'Est. Son intérêt se précisera dans la section suivante : elle permet d'ordonner les calculs. Cependant, il existe encore des sommets du graphe ne possédant pas d'indice : ce sont les croisements des routes que nous tenons à conserver pour le déroulement de l'analyse (nous aurons à calculer de nombreuses fois le plus court chemin d'un point à un autre).

Ce propos fait l'objet de la deuxième remarque.

REMARQUE 2 : On supposera incluse dans E toute intersection de routes. Evidemment, pour éviter toute confusion entre lieux et intersections, chaque croisement sera affecté d'un indice différent de ceux déjà attribués pour les lieux. Supposons que le canton contienne 100 communes et hameaux, on donnera la valeur 101 à la première intersection rencontrée, 102 à la deuxième etc ...

REMARQUE 3 : A côté de chaque indice de lieu figure un nombre entre parenthèses : il représente la population scolarisable du lieu en 1971.

2° U est l'ensemble du réseau routier du canton et dans une première définition, nous dirons qu'il constitue l'ensemble des arcs du graphe. Ainsi $(i, i') \in U$ signifie qu'une route va du lieu i au lieu i'. Or dans le cas du canton d'Arnay-le-duc, toute route peut être parcourue dans les deux sens (tout du moins celles figurant sur notre graphe). Donc, s'il existe $(i, i') \in U$, il existe aussi $(i', i) \in U$. Finalement U représente l'ensemble des arêtes du graphe G, puisque par définition, une arête est un ensemble de deux sommets i et i' tels que $(i, i') \in U$ ou $(i', i) \in U$.

A une arête (= une route) donnée est associée sa longueur en kilomètres. A ce propos qu'il nous soit permis d'anticiper quelque peu sur les lignes à venir. Nous aurons en effet à considérer des circuits de ramassage scolaire dont la désutilité est une fonction croissante du nombre de kilomètres parcourus ou plus exactement, du temps requis pour ces trajets. Il apparaît donc évident que dix kilomètres parcourus sur une route nationale rectiligne semblent moins longs que dix kilomètres franchis sur une route secondaire tortueuse et bordée de nombreux arrêts. Or la carte qui a permis de dresser le graphe offre justement ces deux grandes catégories de routes. Il convient donc de rendre homogènes les distances.

A cet effet, nous évaluons avec les auteurs de l'étude - 1968 à 30 km/h la moyenne effectuée par un car sur un réseau de routes secondaires et à 50 km/h la moyenne accomplie par ce même car sur un réseau de routes nationales. (1). En conséquence, nous conservons les distances observées le long des routes secondaires et nous multiplions les distances comptabilisées le long du réseau des routes nationales par le coefficient $\frac{30}{50} = 0,6$.

Les ensembles E et U étant ainsi déterminés, le graphe peut s'écrire sous la forme suivante : G = (E, U). C'est un graphe connexe, c'est à dire que pout tout compte de sommets distincts, il existe une chaîne allant de l'un à l'autre (une chaîne étant une suite d'arêtes). Cette propriété est importante puisque nous allons envisager des calculs de plus courts chemins. En d'autres termes, supposons une commune isolée (hypothèse peu réaliste), il n'existe aucune route la reliant aux autres, si bien que le regroupement de ce lieu avec les autres communes s'avère impossible sinon par la pensée. Si ce cas était survenu il aurait fallu éliminer ce lieu isolé de l'analyse ou le "connecter" au graphe. Cette dernière solution implique l'intervention des pouvoirs publics (traçage d'une route).

B) Les indices de "qualité"

Il s'agit de l'indice des effectifs et de l'indice de transport. Le premier mesure le coût (la désutilité) ou le gain (l'utilité) obtenu (e) lorsqu'on ajoute la population scolaire d'un lieu à la population scolaire totale d'un sous-ensemble de E . Le second indique le coût (la désutilité) induit(e) par une augmentation du temps de transport et par un accroissement du nombre d'élèves à déplacer.

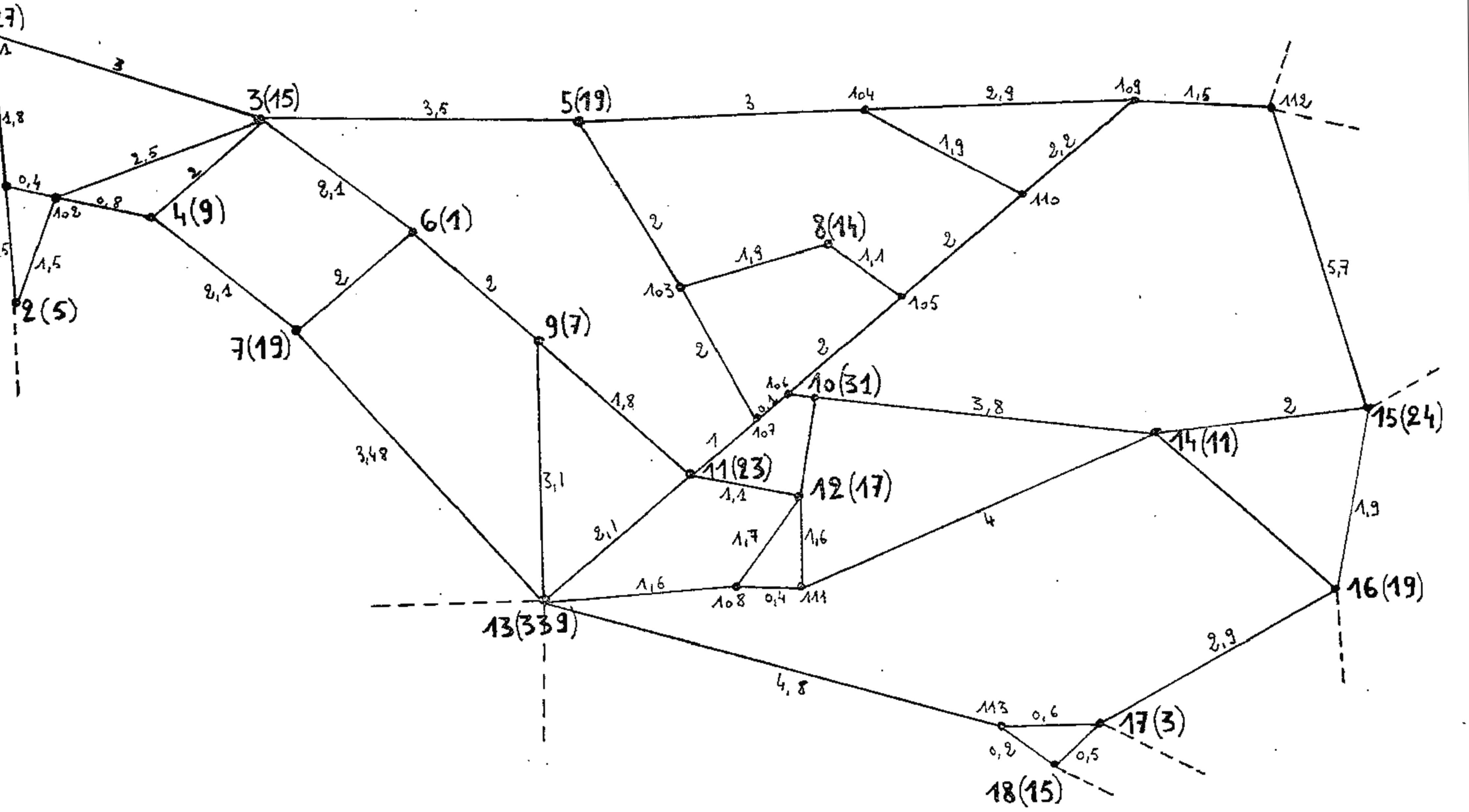
L'acception du terme "qualité" est de la plus grande généralité.

1° L'indice des effectifs : Sa construction repose sur les observations suivantes :

---

(1) c'est la moyenne qui nous fut conseillée par le Ministère de l'Equipement.

GRAPHE DE DEPART : G



Une école jugée "optimale" comprend 5 classes ou un multiple de 5. Par ailleurs, il convient que ces classes contiennent chacune un effectif de 25 à 35 élèves, le nombre optimal se situant aux environs de 30. Nous estimerons optimale une classe de 28 élèves, les effectifs plus faibles, étant moins pénalisés que les effectifs plus importants. Enfin, nous ne pensons pas que les regroupements d'écoles primaires en milieu rural donnent des effectifs très nombreux à scolariser. Les auteurs de l'étude - 1968 - étudièrent 5 cantons recouvrant "à peu près toute la gamme des situations possibles : types d'habitat, importance des communes et relief" (1) et le regroupement le plus important auquel l'étude aboutit comprenait 169 élèves (2). Pour les besoins de notre étude, nous prenons une marge de "sécurité" en considérant un chiffre supérieur, disons 280, c'est-à-dire, 2 fois 5 classes dites "optimales" (2 x 5 x 28).

Finalement, l'indice devra rendre compte de trois situations. Résumons les par trois questions :

- Quel est le gain d'utilité obtenu lorsqu'en partant d'un effectif nul, on parvient peu à peu à remplir les 5 classes d'une école jugée optimale ? Autrement dit, en partant d'une désutilité maximale (effectif = 0) et en arrivant à une désutilité minimale (effectif = 140 = 28 x 5), on se demande quelle forme aura affecté la courbe représentative de l'indice traduisant cette baisse de désutilité.
- Quelle est la perte d'utilité induite par une saturation progressive de ces 5 classes en élèves ? Sachant que l'effectif maximum d'une classe est de 35 élèves, on s'intérroge sur la variation de la courbe représentative de l'indice mesurant l'accroissement de désutilité d'un effectif de 140 à un effectif de 175 (5 x 35).

---

(1) page 74
(2) cf. Tableau I : "Rapport sur un regroupement systématique des écoles primaires rurales" - Annexes.

- A partir du 175 ème élève, l'effectif maximum de l'école est atteint. Pour un élève de plus, la construction d'une nouvelle école s'impose. On peut dès lors imaginer que les 176 élèves se répartissent dans 2 écoles, chacune possèdant un effectif de 88. A une école près, nous sommes ramenés à la première situation. Quel est le gain d'utilité obtenu lorsqu'en partant d'un effectif de 176 on parvient peu à peu à la situation optimale, c'est-à-dire 280 élèves ?

Plutôt qu'un indice unique, nous devons considérer une famille de trois indices. Si l'on raisonne en terme de désutilité, la représentation graphique du premier accusera une courbe décroissante sur l'intervalle (0, 140) des effectifs. Le second indiquera une courbe croissante sur l'intervalle (140, 175). Enfin la courbe du troisième sera décroissante sur l'intervalle (176, 280). La discontinuité apparaissant entre le 175 ème et le 176 ème élève, révèle la construction d'une nouvelle école et le dédoublage des classes.

Avant de passer à la construction de ces indices, il importe à ce stade, d'expliciter l'hypothèse fondamentale qui nous a valu le raisonnement esquissé précédemment : nous supposons que les élèves se répartissent uniformément suivant les différentes classes.

Appelons N, N' et N" les 3 indices. Chacun s'exprime en fonction de la variable n représentant les effectifs. A cet effet, nous pensons que la fonction la plus réaliste est une fonction simple du type : N, N' ou N" $= an^2 + bn + c$. Comme nous pourrons nous en rendre compte, les résultats ne semblent pas irréalistes. Mais pour l'instant, il convient d'estimer les valeurs des paramètres a, b et c suivant les intervalles de n.

a) $0 \leqslant n \leqslant 140$

$$N = an^2 + bn + c \quad (1)$$

Pour n = 0, la désutilité est maximum et nous convenons d'attribuer la valeur 200 à N. Or n = 0 et N = 200 nous donnent immédiatement c = 200 d'après l'équation (1).

D'autre part, nous savons que la courbe atteint son minimum lorsque sa dérivée s'annule (2 an + b = O) et aussi pour un effectif optimal n = 140, d'où l'équation (2) : 280 a + b = O.

De même N = O (désutilité nulle) pour n = 140, d'où l'équation (3) : $a(140)^2 + 140\,b + 200 = 0$.

Les équations (2) et (3) nous donnent un système d'où l'on tire les valeurs :

a = 0,010204

b = - 2,85712

Et l'indice s'écrit :

$$\boxed{N = 0{,}010204\, n^2 - 2{,}85712\, n + 200}$$

Valeurs particulières :

n	10	40	60	88	125
N	172,449	102,036	65,294	27,564	2,237

b) $140 \leqslant n \leqslant 175$

Il convient d'estimer les paramètres a, b et c de la fonction $N' = an^2 + bn + c$ de façon à pénaliser les effectifs supérieurs à 140. Ainsi 155, symétrique de 125 par rapport à 140, se verra pénalisé deux fois plus qu'un effectif de 125 élèves. Donc n = 155 implique N' = 2 x 2,237 = 4,474 et nous obtenons l'équation :

$$a(155)^2 + b\,155 + c = 4{,}474 \qquad (1)$$

D'autre part, la fonction atteint son minimum pour n = 140 d'où l'équation :

$$280\,a + b = 0 \qquad (2)$$

Enfin pour n = 140, nous savons que la désutilité est minimale N' = 0, ou :

$$(140)^2 \; a + 140 \; b + c = 0 \qquad (3)$$

Après résolution du système, on obtient les valeurs suivantes :

a = 0,019884

b = - 5,567520

c = 389,7264

L'indice N' s'écrit :

$$\boxed{N' = 0{,}019884 \; n^2 - 5{,}56752 \; n + 389{,}7264}$$

Valeurs particulières :

n	140	170	175
N'	0	17,896	24,358

c) $176 \leqslant n \leqslant 280$

Pour n = 176, nous avons supposé que les effectifs se dédoublent.

Deux écoles possèdant chacune 5 classes, se répartissent également 176 élèves. En ce point :

N" = 2N = 2 x 27,564 = 55,128

avec : $N'' = an^2 + bn + c$

ou : $a(176)^2 + b\,176 + c = 55{,}128 \qquad (1)$

La désutilité sera minimale ($N'' = 0$) lorsque les écoles auront atteint chacune un effectif de 140, donc pour $n = 280$. Nous obtenons les équations :

$$560\,a + b = 0 \qquad (2)$$

et : $$a(280)^2 + b\,280 + c = 0 \qquad (3)$$

De ces 3 équations on déduit les valeurs suivantes :

$a = 0{,}00509689$

$b = -\,2{,}8542584$

$c = 399{,}5962$

Donc :

$$\boxed{N'' = 0{,}00509689\; n^2 - 2{,}8542584\; n + 359{,}5962}$$

Valeurs particulières :

n	176	200	250	280
N"	55,128	32,62	4,59	0

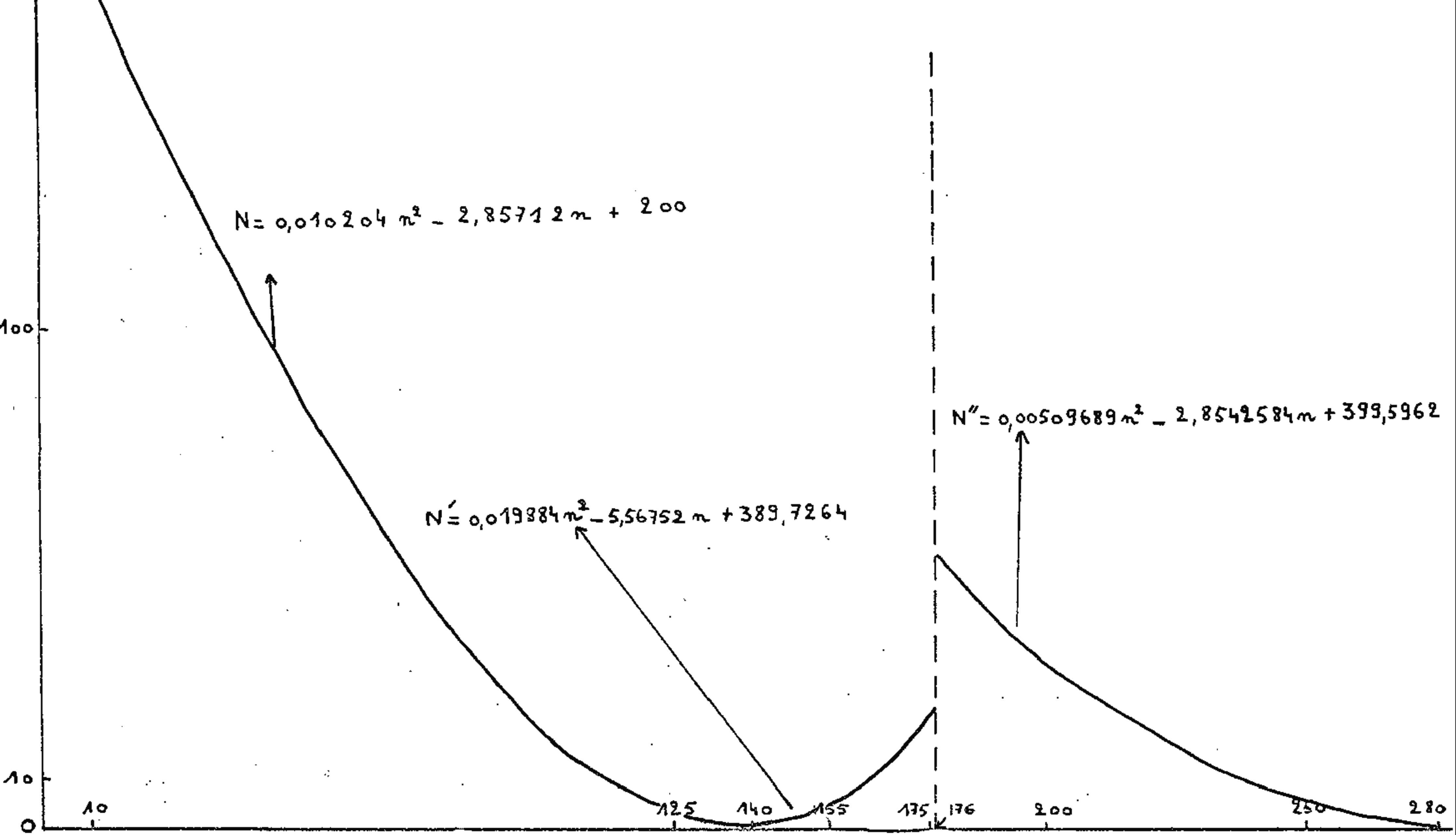
2° L'indice de transport : Commençons par définir un indice individuel t lequel permettra l'élaboration de l'indice de transport T qui reflètera la réalité suivante : une école est considérée comme d'autant meilleure qu'elle nécessite le transport de moins d'enfants pendant un temps moins long. Au-delà de une demi-heure de transport, cette école sera jugée comme néfaste. T est donc un indice global.

a) Définition de l'indice individuel t :

Il devra montrer que le temps passé par un enfant dans un car de ramassage est un handicap qui va croissant jusqu'à une demi-heure de transport et qui devient insupportable au-delà de cette durée.

EFFECTIFS

INDICES DE DESUTILITE N, N' ET N''



La démarche idéale aurait nécéssité que l'on effectue réellement chaque parcours dans les conditions de transport de l'enfant pour en déterminer les durées. Ensuite les avis des psychologues ou des médecins auraient été précieux lors de l'élaboration du tableau des correspondances entre les valeurs de l'indice d'une part, et le temps requis pour ces trajets d'autre part. Pratiquement, cette solution s'avèrait impossible dans le cadre de notre exposé, le nombre des trajets étant trop important. L'indice t ne sera donc pas une fonction de la durée, mais de la distance kilométrique d. La transformation du temps en distance, demeure une opération délicate : il serait en effet un pur hasard que deux trajets recouvrant le même nombre de kilomètres, soient jugés équivalents eu égard à la notion de temps. En réalité, tout dépendra de la catégorie et de l'état des routes qui les constituent, du type de relief qu'ils franchiront, du nombre d'arrêts qu'ils auront à considérer et aussi du type de véhicule les parcourant. Comment rendre homogène un espace que la réalité présente hétérogène ? Nous avons précédemment apporté un élément de réponse à cette question (A) 2°) en estimant à 30 km/h la vitesse moyenne accomplie sur l'ensemble du réseau de communications.

Nous pouvons maintenant prétendre que l'indice t est une fonction croissante de d. Deux considérations permettront d'estimer sa courbe représentative.

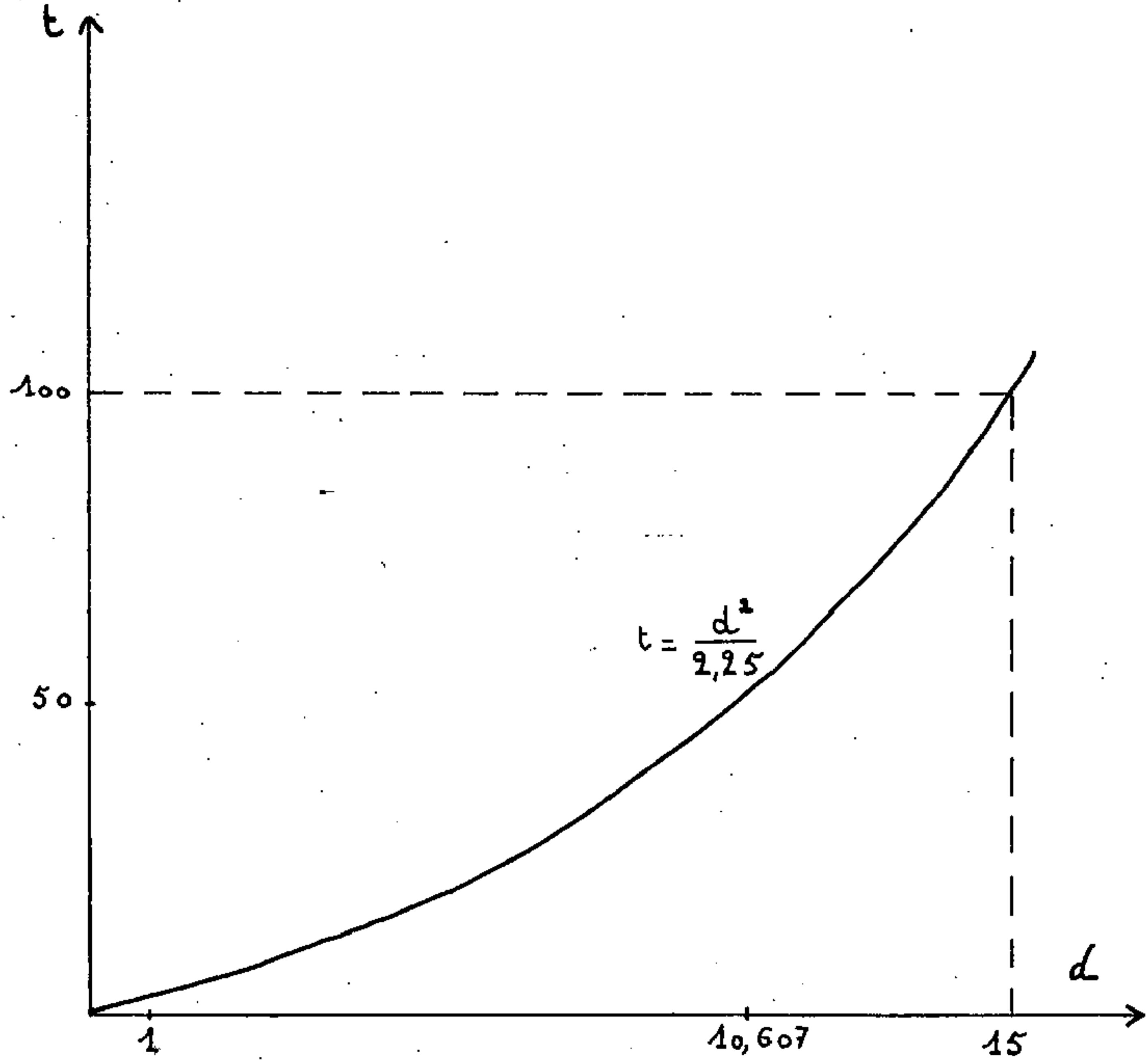
- La désutilité sera évidemment nulle lorsque le nombre de kilomètres à parcourir est lui-même nul : d = 0 implique t = 0.
- Considérant un trajet maximum de 15 km (c'est-à-dire correspondant à une durée de une demi-heure), la courbe présentera une forme exponentielle traduisant ainsi une désutilité fortement croissante des kilomètres marginaux. Par exemple, il serait souhaitable que la somme des désutilités rencontrées pour parcourir les deux-tiers du trajet soit la même que celle comptée le long du dernier tiers.

---

(1) Cela revient à multiplier par 0,6 les distances kilométriques associées aux routes nationales lesquelles permettent une moyenne de 50 km/h.

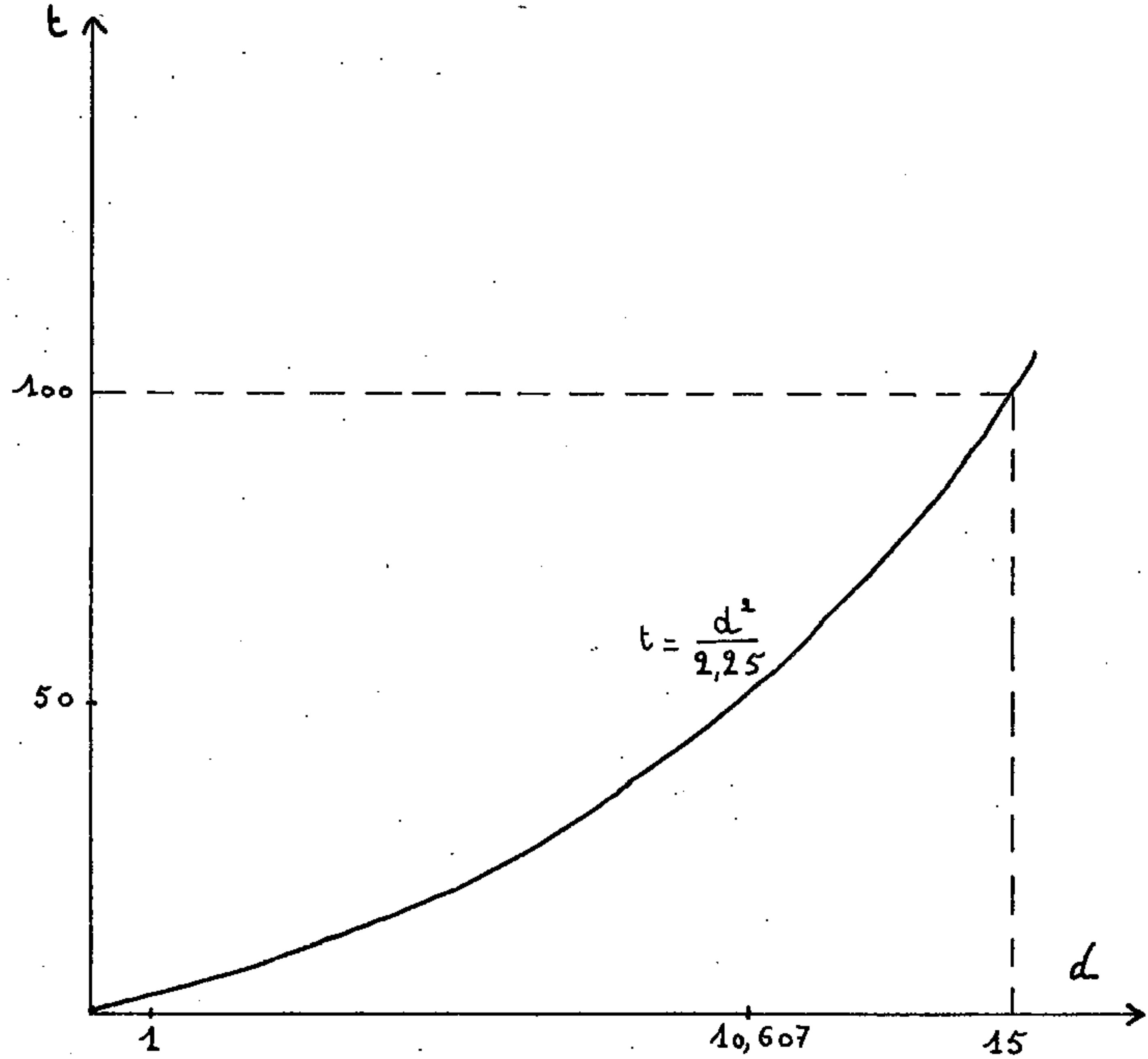
TRANSPORT

INDICE INDIVIDUEL DE DESUTILITE t



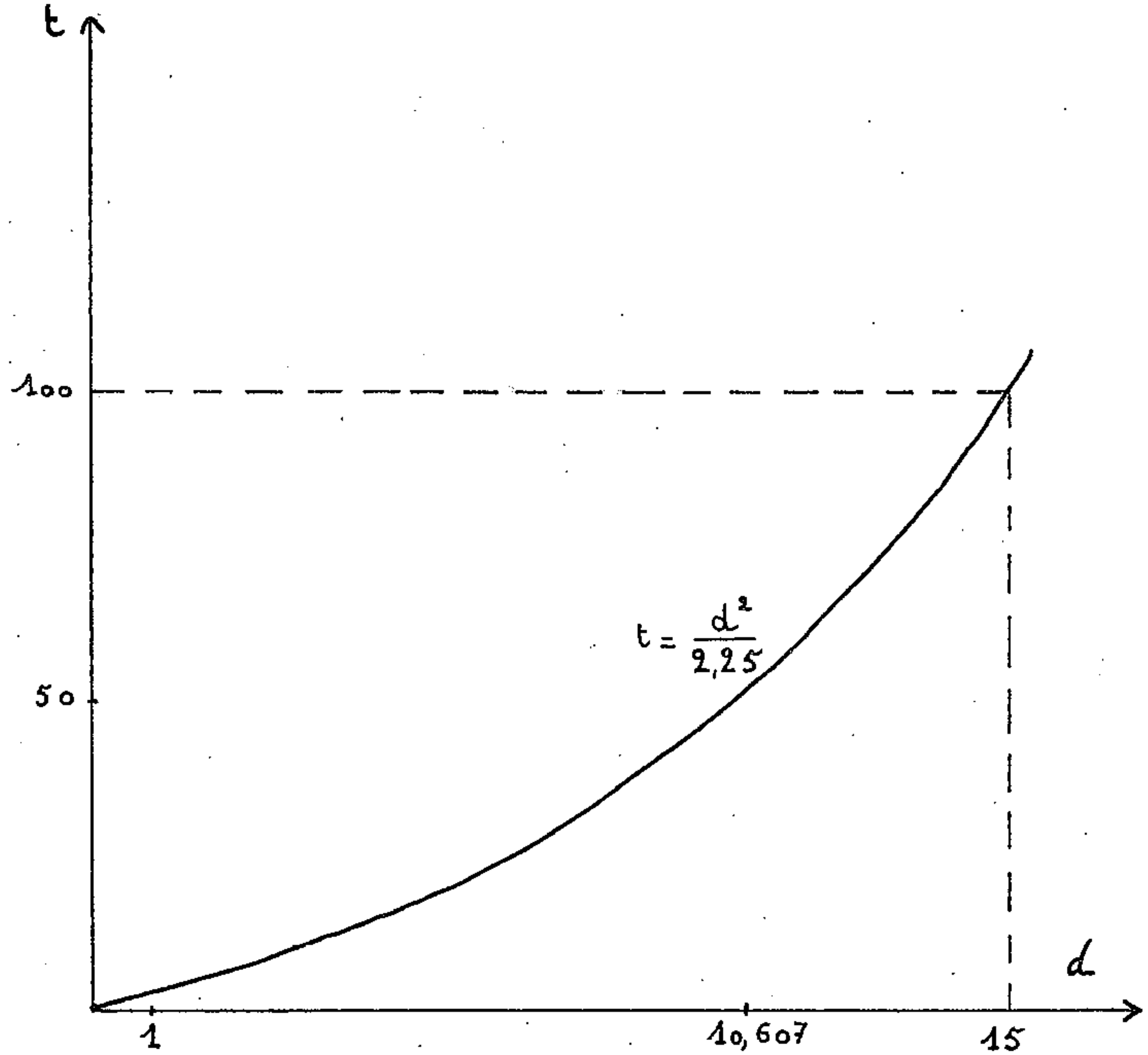
TRANSPORT

INDICE INDIVIDUEL DE DESUTILITE t



TRANSPORT

INDICE INDIVIDUEL DE DESUTILITE t



Supposons fixé le lieu l. (Rappel : E est l'ensemble de départ schématisant le canton d'Amay le duc, il possède n éléments). Avant de poursuivre, une remarque s'impose : elle concerne la notation.

A partir de maintenant, l'indice se trouvant en haut et à droite d'une lettre majuscule servira à repérer le dernier lieu ajouté à un ensemble donné, exemple : $E^{i'}$, i' est le lieu qui ajouté à l'ensemble $E^{(i'-1)} = (1,2,3 \ldots l \ldots i \ldots (i'-1))$, nous donne le nouvel ensemble $E^{i'}$. L'indice se situant en bas et à droite indique le lieu, exemple : $T_l^{i'}$ représente l'indice global associé au lieu l et exprimé en fonction du lieu i' ajouté à l'ensemble $E^{(i'-1)}$, c'est-à-dire à partir de l'ensemble $E^{i'}$.

Dès lors l'expression de $T_l^{i'}$ nécessite quatre opérations :

1. Calcul des chemins les plus courts de tous les lieux appartenant à $E^{i'} - \{l\}$ au lieu l. Soit $d_{i,l}$ le plus court chemin de i à l. Pour tous les autres éléments de $E^{i'} - \{l\}$ on a respectivement :

$$d_{1,l} \qquad d_{2,l} \qquad d_{3,l} \ldots \quad d_{i,l} \ldots \; d_{i',l}$$

2. Transformation des distances en indices grâce à la formule

$$t = \frac{d^2}{2,25}$$

Soit $t_{i,l}$ l'indice obtenu à partir de $d_{i,l}$, on a :

$$t_{1,l} \qquad t_{2,l} \qquad t_{3,l} \ldots \qquad t_{i,l} \ldots \quad t_{i',l}$$

3. Lecture de l'effectif associé à chaque élément de l'ensemble $E^{i'} - \{l\}$. Soit n_i l'effectif du lieu i, il vient :

$$n_1 \qquad n_2 \qquad n_3 \ldots \qquad n_i \ldots \qquad n_{i'}$$

4. Expression de l'indice global associé au lieu l.

$$T_l^{i'} = t_{1,l}\, n_1 + t_{2,l}\, n_2 + t_{3,l}\, n_3 + \dots + t_{i,l}\, n_i + \dots + t_{i',l}\, n_{i'}$$

$$\boxed{T_l^{i'} = \sum_{i \in E^{i'}} t_{i,l}\, n_i} \qquad (1)$$

l étant fixé et appartenant à l'ensemble $E^{i'}$.

Le problème ayant été circonscrit, nous nous proposons de lui apporter une solution. C'est le but de la section 2.

<u>Section 2</u> : Eléments de réponse

Comment utiliser les données à la résolution du problème ? Dans quelle mesure pouvons-nous admettre la validité de cette solution ? Quel sera son aboutissement ?

C'est à ces questions que veulent répondre les trois paragraphes de cette présente section.

-1. LA METHODE

A) <u>Le principe</u> :

Considérant l'ensemble initial E, il s'agit de trouver le dernier des sous-ensembles $E^{i'}$ engendré par E, tel que la désutilité globale reglètant les deux indices précédents soit minimale.

B) <u>L'indice de désutilité totale</u> :

1° Sa forme

- Soit D cet indice, la façon dont il résume les deux indices précédents est élémentaire.

---

(1) Cette formule nous donne une valeur brute. Nous serons amenés à multiplier chaque $T_l^{i'}$ par une constante $c = \frac{200}{1555,4}$, cf. section 2 -B) -2°).

(1) Entendons cadre servant à l'analyse du choix d'un de ses éléments.

Nous proposons une relation du type $D = \alpha N + \beta T$ où α et β représentent respectivement l'importance accordée aux critères "effectif" et "transport". A priori, nous pensons qu'il n'y a aucune raison d'accorder un avantage particulier à l'un d'eux, ce qui nous conduit à poser $\alpha = \beta = 1$ et à retenir l'écriture suivante : $D = N + T$ (1).

- En conséquence, la désutilité totale du lieu l appartenant à l'ensemble $E^{i'}$ n'est autre que la somme de la désutilité occasionnée par l'effectif total à scolariser en l et de la désutilité suscitée par le transport des élèves des autres lieux de l'ensemble $E^{i'} - \{l\}$ en l. Elle s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} D_l^{i'} = N_l^{i'} + T_l^{i'} \\ \\ l \in E^{i'} \end{array}}$$

2° Sa représentation graphique

- Elle s'effectue dans un espace à deux dimensions, l'axe vertical portant les valeurs de N et l'axe horizontal celles de T.

REMARQUE IMPORTANTE : les 2 axes forment un repère orthonormé, car nous allons considérer un système de droites d'indifférence pour l'indice de désutilité totale, l'inclinaison de la famille des droites étant de 45°. La présentation d'un tel graphique nécessite l'établissement préalable d'une correspondance entre les valeurs de N et celles de T.

- Les valeurs de N portées par l'axe vertical nous sont données par les formules N, N' ou N" établies au cours de la section précédente (-2-B)-1°), elles nous serviront à ordonner les valeurs de T repérées sur l'axe horizontal.

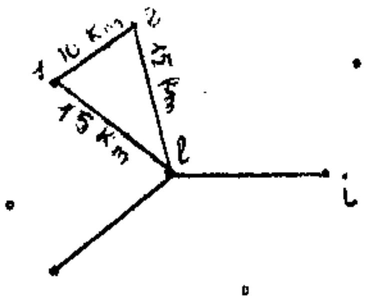
Considérons par exemple la valeur N = 200, elle exprime la désutilité correspondant à un effectif nul (1). A la limite, nous pouvons concevoir une école idéale (2) où la perfection serait atteinte, si toutefois elle ne possèdait pas un effectif nul : imaginons une telle école dont les portes restent fermées à cause d'une grève ou tout simplement à cause des vacances. Dans ce cas, nous posons que la désutilité est maximum. Notre propos est donc ici de trouver un rapport de ressemblance partielle qui nous permettrait de supposer qu'une certaine valeur (valeur brute : cf note (1) page 26) de l'indice T corresponde à N = 200, dans quel cas on donnerait la valeur 200 à T. Schématisons le problème en considérant $E^2 = (1,2)$ tel que le lieu 1 contienne une école sans élèves et que le lieu 2 possède la particularité de compter un effectif optimal de 140 élèves, sans que ceux-ci y trouvent une école. La situation est donc la suivante = $N^2{}_1 = 200$, $T^2{}_1$ n'a pas de signification puisqu'il n'y a pas d'élèves ; $T^2{}_1 = 0$, $N^2{}_2$ n'a aucun sens étant donné l'absence d'école en 2. Et le problème qu'on se pose est de découvrir le lien qui permettrait d'affecter une signification à $T^2{}_1$ ou $N^2{}_2$. La solution est aisée dès lors qu'on introduit la notion de mobilité. Une alternative et une seule se présente, le lieu existe de 1 à 2 ce qui revient à considérer le transfert de l'école et son implantation en 2, dans quel cas on aurait $N^2{}_2 = 0$, mais cette fois il faudrait introduire un autre indice mesurant la désutilité du transfert. Le lien existe de 2 à 1, l'école reçoit un effectif optimal, l'école idéale devient tangible :

$$N^2{}_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad T^2{}_1 = t_{2,1} \times 140 \qquad \text{avec } t_{2,1} = \frac{d_{2,1}}{2,25}.$$

Nous conservons cette deuxième possibilité, la première supposant le transfert d'une école ne rentre pas dans le cadre de notre analyse (hypothèse peu réaliste d'ailleurs).

Après avoir affecté une signification à l'indice $T^2{}_1$ on devra lui assigner une valeur qui corresponde à celle de $N^2 1$, avant l'introduction du lien de mobilité, c'est-à-dire 200. Quelle est la valeur (brute) de $T^2{}_1$ qui corresponde à 200 ? Nous possèdons le lien unissant les deux objets (1 et 2) il ne reste plus qu'à l'apprécier : à première vue il semblerait raisonnable de poser $d_{2,1} = 15$ km, c'est la contrainte que nous nous sommes fixée. Dès lors le transport de 140 élèves sur une distance de 15 km représenterait le maximum de désutilité pour ce critère, mais il serait fallacieux d'inférer cette remarque générale d'un exemple particulier. Nous sommes en effet, partis d'un ensemble à deux éléments, E^2.

Soit $E^{i'}$ tel que $i' > 2$, imaginons que nous nous intéressions au lieu l de $E^{i'}$ choisi comme commune d'accueil. Le maximum de désutilité sera largement dépassé lorsque $T^{i'}_{l} = \frac{15^2}{2,25} \times 140$, car dans les calculs nous n'avons tenu compte que des plus courts chemins. Si pour une valeur brute de $\frac{15^2}{2,25} \times 140$ on affectait le maximum de désutilité à l'indice, c'est-à-dire 200, on serait bien loin de la réalité : supposons que l'on retienne l comme commune d'accueil, alors chaque lieu de $E^{i'}$ - (l) peut à la limite, se trouver à 15 km de l. Si chaque lieu possède son propre bus de ramassage, la contrainte du temps de transport n'est pas dépassée. Or tel n'est pas le cas : en moyenne, chaque élève parcourera une distance supérieure à celle indiquée dans nos calculs. Par exemple, si le ramassage est commun aux lieux 1 et 2 et que le bus parte de 1, les élèves de cette commune parcoureront 25 km.



Nous tenons compte de cette remarque en choisissant une distance inférieure à 15 km dans le calcul des indices, soit 5 km. Ce nombre peut paraître faible mais une autre remarque, concernant l'indice T lui-même, préconise elle aussi une petite distance (cf. C).

Finalement <u>on tiendra pour équivalents la désutilité relative à un effectif nul et la désutilité induite par le transport de 140 élèves sur une distance de 5 km.</u> Toutes deux sont maxima :

$$N = T = 200$$

En conséquence $T = \frac{5^2}{2,25} \times 140$ équivaut à 200.

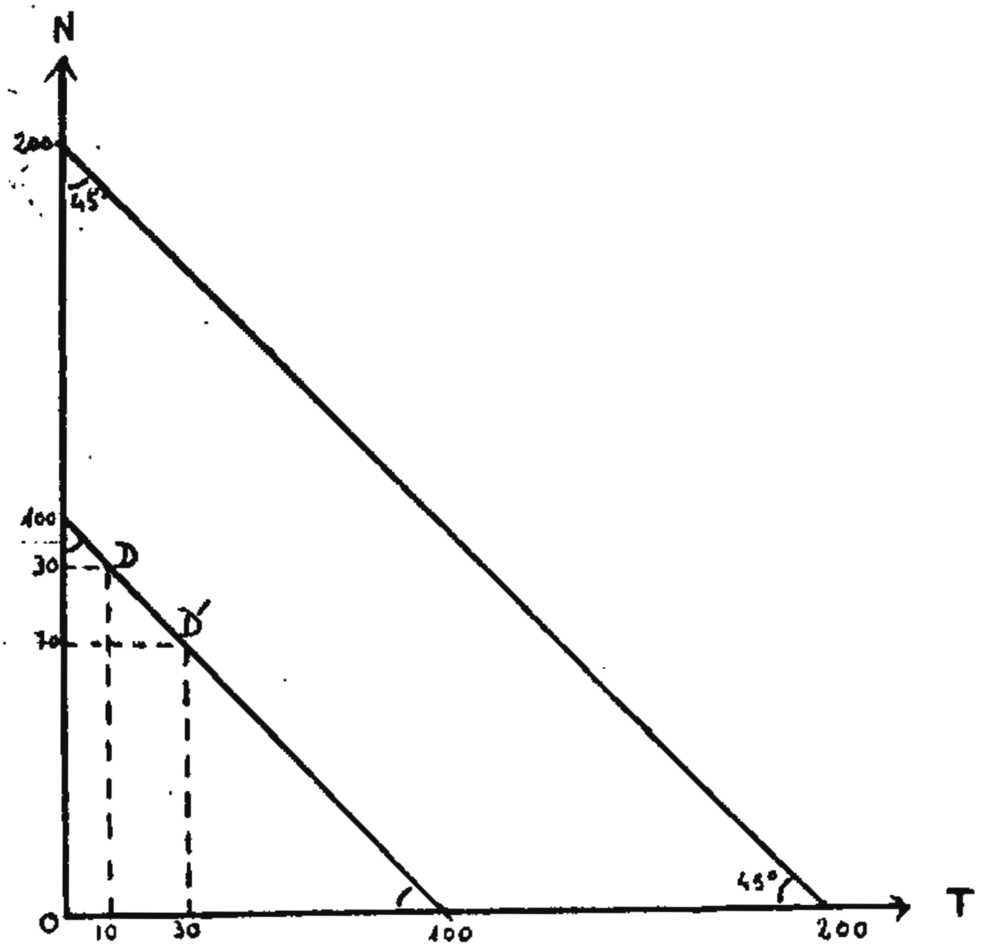
---

(1) Nous retenons ici la formule $N = 0,010204\, n^2 - 2,85712\, n + 200$ où $n = 0$ implique $N = 200$: c'est le maximum de désutilité.
(2) Dans l'idée qu'on se fait de ce que pourrait être une école en égard à certains critères. cf. Chapître 2.

Dès que $T^{1'}_{1}$ atteindra $\frac{5^2}{2,25} \times 140 = 1555,4$ on lui affectera la valeur 200. Pour ne pas considérer tout au long des calculs cette série de transformations, on multipliera chaque valeur (brute) par $C = \frac{200}{1555,4}$. L'expression finale de l'indice de transport s'écrit :

$$\boxed{T^{1'}_{1} = \frac{200}{1555,4} \sum_{1 \in E^{1'}-(1)} t_{1,1}\, n_{1}}$$

- Nous pouvons maintenant repérer l'indice de désutilité totale D sur le graphique suivant :



Les droites étant parallèles, elles ne se coupent pas : chaque point D, repéré dans le plan, appartient nécessairement à une droite et une seule. Dans ce cas il exprime une désutilité totale donnée par la somme de ses projections sur les axes : $D = N + T$. Plus précisément, chaque droite est le lieu géométrique d'une infinité de points liés par la relation $D = N + T$, chacune d'elles exprime donc la même valeur de l'indice : ce sont des droites d'indifférence. Plus on s'éloigne de l'origine, plus grande est la désutilité obtenue par le point situé sur une telle droite.

Le pente des droites est égale à -1, elle résulte du choix adopté quant à la pondération des indices N et l, nous avions supposé des poids égaux, $\alpha = \beta = 1$. En effet, imaginons par exemple $D = D' = 100$, une baisse de désutilité de 20 unités en ce qui concerne l'indice des effectifs est totalement compensée par une augmentation du même pourcentage de l'indice exprimant la désutilité du transport. Les situations D et D' sont équivalentes.

C) <u>L'importance de l'indice de transport dans l'analyse</u> :

1° L'indice considéré comme indicateur de désutilité :

A partir de l'ensemble $E^{i'}$, nous calculons pour chaque lieu l, son indice de désutilité totale $D^{i'}_{l} = N^{i'}_{l} + T^{i'}_{l}$; l prenant successivement les valeurs (1,2, ... i...i'). Parmi cette liste de i' indices nous choisissons celui qui possède la plus petite valeur. Mais il est à remarquer que $N^{i'}_{l}$ est invariant, à l'intérieur d'un même ensemble il possède la même valeur quelque soit le lieu l fixé parce qu'il est établi à partir de l'effectif total de l'ensemble considéré : $n^{i'} = \sum_{i=1}^{i'} n_i$. L'indice des effectifs sert avant tout à caractériser l'ensemble qui nous permet son calcul, nous l'écrirons $N^{i'}$:

$$\forall l, \; N^{i'}_{l} = \text{constante} = N^{i'}$$

En conséquence, le lieu qui possèdera la désutilité totale la plus faible à l'intérieur d'un même ensemble, sera celui pour lequel l'indice de transport connaîtra le minimum de désutilité,

$$\min_{l \in E^{i'}} (T^{i'}_{l}) \Longrightarrow \min_{l \in E^{i'}} (D^{i'}_{l}) \qquad (1)$$

2° l'indice envisagé comme moment d'inertie

a) Si nous posons $m = \dfrac{200 \times n}{1555,4 \times 2,25}$

alors $T = md^2$, expression d'un moment d'inertie.

$T^{i'}_{l}$ est le moment d'inertie du lieu l par rapport à tous les autres lieux de l'ensemble $E^{i'}$.

b) Si nous assimilons l'espace à un ensemble de points, nous dirons que le point possèdant l'inertie la plus forte est un point périphérique de l'espace et celui dont le moment d'inertie est le plus faible constitue le centre de cet espace.

REMARQUE ; la représentation de celui-ci est réduite à son expression la plus simple ; une méthode extrêmement simple consiste à graduer les bords d'une carte géographique, ainsi tous les points sont repérés par leurs coordonnées dans un espace à deux dimensions. Ici les points sont ordonnés en fonction de leur position géographique dans un diagramme de Venn-Euler il n'est pas besoin de ranger les éléments suivant un certain ordre : à la limite la connaissance de l'ensemble nous donne immédiatement celle de l'espace : c'est un diagramme de Venn-Eule r respectant la position géographique des éléments. Le symbole $E^{i'}$ représente et l'ensemble et l'espace.

- Si $\max_{l \in E^{i'}} (T^{i'}_{l}) = T^{i'}_{p(i')}$ alors $p(i')$ est le point périphérique de l'espace $E^{i'}$

- Si $\min_{i \in E^{i'}} (T^{i'}_{i}) = T^{i'}_{c(i')}$, alors c(i') est le centre de l'espace $E^{i'}$ (2)

L'acceptation de ces termes est évidemment de la plus grande généralité : imaginons le déplacement d'un nombre donné d'élèves vers un certain point. Plus la distance sera importante, plus l'indice de transport T sera grand et plus le point sera rejeté à la périphérie de l'espace. Au contraire, si la distance est faible le point possèdera un indice peu important et sera positionné aux environs du centre de gravité du système. La pondération des distances par les effectifs élargit encore la notion, néanmoins les calculs montreront qu'elle n'est pas complètement dénuée de sens.

3° Conséquence quant au choix de la commune d'accueil

Les résultats (1) et (2) montrent que le centre de l'espace est le lieu pour lequel la désutilité totale est la plus faible : il sera choisi comme commune d'accueil.

Dès lors on peut se demander si cette méthode peut constituer à elle seule, un modèle de localisation du "regroupement" ; elle nous fournit une liste de lieux classés suivant l'importance de leur contribution à l'inertie du système. Pour l'instant, elle n'en constitue qu'une ébauche, le schéma doit être évidemment, quelque peu compliqué pour correspondre à la réalité : les critères "effectif" et "transport" sont importants, mais ce ne sont pas les seuls et le contenu du deuxième paragraphe viendra modérer la prétention d'une telle question.

Néanmoins il ne nous coûtera rien de conserver cette liste et de la confronter aux résultats des méthodes multicritères. Dorénavant, le centre de l'espace sera considéré comme étant la commune d'accueil provisoire du regroupement.

D) <u>Les différentes phases de la méthode</u> :

1° Pour <u>chaque</u> sous-ensemble $E^{i'}$ les opérations se répartissent selon 5 phases :

<u>1 ère phase</u> : Calcul de l'effectif total associé à $E^{i'}$

$$n^{i'} = \sum_{i=1}^{i'} ni$$

<u>2 ème phase</u> : Calcul de l'indice de désutilité correspondant à $n^{i'}$

a) si $0 \leqslant n^{i'} \leqslant 140$
alors $N^{i'} = 0,010204(n^{i'})^2 - 2,85712\ n^{i'} + 200$

b) si $140 \leqslant n^{i'} \leqslant 175$
alors $N^{i'} = 0,019884\ (n^{i'})^2 - 5,56752\ n^{i'} + 389,7264$

c) si $176 \leqslant n^{i'} \leqslant 280$
alors $N^{i'} = 0,00509689(n^{i'})^2 - 2,8542584\ n^{i'} + 399,5962$

<u>3 ème phase</u> : fixation successive de tous les lieux du sous-ensemble, chaque lieu sera tour à tour considéré comme commune d'accueil provisoire. La séquence que nous allons considérer vaut pour l, elle se répètera (i'-1) fois suivant les différentes valeurs de l.

a) Calcul des plus courts chemins des lieux appartenant à $E^{i'}-(l)$ vers l :

$d_{i,l}$ avec l fixé et i appartenant à $E^{i'} - (l)$

b) transformation des distances en indices $t_{i,\ l}$

c) calcul de l'indice de transport associé au lieu l : $T^{i'}{}_{l}$.

<u>4 ème phase</u> : parmi la liste des i' valeurs de T, on conserve la plus faible. Elle nous indique le lieu qui sera momentanément choisi comme commune d'accueil.

Si $\min_{l \in E^{i'}} (T^{i'}_{l}) = T^{i'}_{c(i')}$ alors c(i') = commune d'accueil provisoire.

<u>5 ème phase</u> : calcul de l'indice de désutilité globale concernant la commune d'accueil provisoire :

$$D^{i'}_{c(i')} = N^{i'} + T^{i'}_{c(i')}$$

2° E est l'ensemble initial, générateur des sous-ensembles $E^{i'}$. Il cessera d'accomplir cette fonction lorsqu'on aura déterminé le sous-ensemble donnant naissance à l'espace cadre d'analyse. Puisque la naissance est immédiate, instantanée, l'arrêt final des opérations est commandé par la recherche du sous-ensemble. Ainsi posé, le problème paraît simple, il suffirait de déterminer le sous-ensemble pour lequel la désutilité totale associée à un de ses éléments, serait plus faible que toute autre désutilitée associée à tout autre élément de tout autre sous-ensemble. Cette apparente simplicité résulte évidemment de l'assimilation de l'espace à un ensemble de points, définition rudimentaire que nous devrons quelque peu enrichir. Dès lors, le problème prendra une autre dimension. Après avoir exposé ses différentes étapes, nous proposerons une solution.

D'une façon générale, appelons $D^{i'}_{c(i')}$ la désutilité totale de l'élément c(i') (du lieu c(i')) possédant l'indice de transport le plus faible (le moment d'inertie le plus faible), et appartenant au sous-ensemble $E^{i'}$ (à l'espace $E^{i'}$).

a) Le résultat $D^{i'+1}_{c(i'+1)} > D^{i'}_{c(i')}$ est une condition nécessaire mais non suffisante de l'interruption des opérations. En effet, à ce stade deux éventualités peuvent se présenter :

α.1) $\quad D^{i'}_{c(i')} > D^{i'+2}_{c(i'+2)} \quad -\{(i' + 1)\}$ (1)

Il se peut que l'accroissement de la désutilité du transport soit plus que compensée par la diminution de la désutilité de l'effectif ou réciproquement.

On devra alors considérer $D^{i'+3}_{c(i'+3)} - \{(i'+1)\}$ etcomparer avec l'expression $D^{i'+2}_{c(i'+2)} - \{(i'+1)\}$.

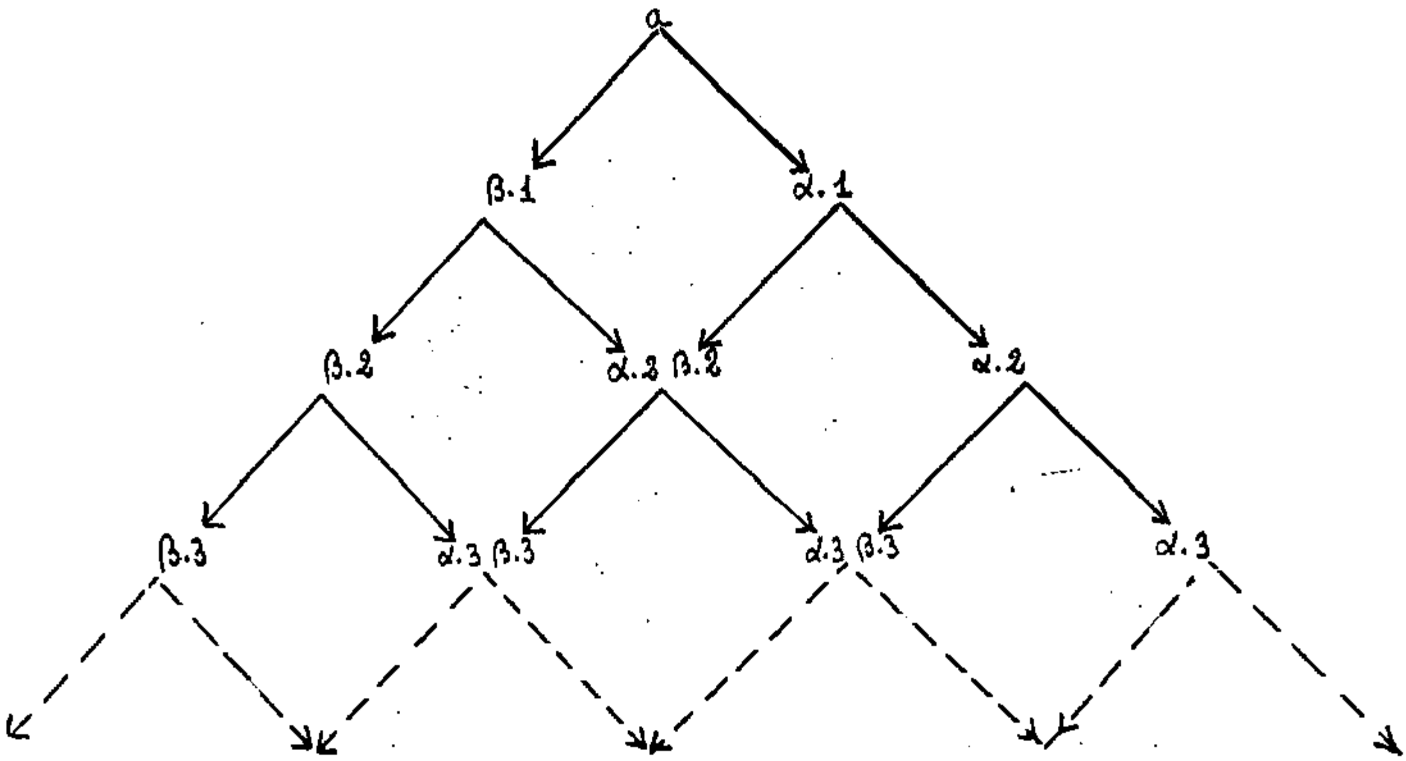
$$\beta.1) \quad D^{i'}_{c(i')} \qquad D^{i'+2}_{c(i'+2)} - (i'+1)$$

Dans ce cas, nous devrons envisager la comparaison de

$$D^{i'+3}_{c(i'+3)} - \{(i'+1)\} - \{(i'+2)\}$$

avec $D^{i'}_{c(i')}$.

b) A nouveau ces deux éventualités sont également possibles pour chacune d'entre elles, et ainsi de suite :



(1) Cette notation représente la désutilité totale du centre de l'espace assimilé à l'ensemble $E^{i'+2}$ où on élimine le lieu i'+1 c'est-à-dire $E^{i+2}_{i'+3} - (i'+1)$. De même, $D^{i'+3}_{c(i'+3)}$ se rapporte à l'ensemble $E^{i'+3} - (i'+1) - (i'+2)$ et ainsi de suite.

Supposons réalisée la séquence :

$\alpha.1 \rightarrow \beta.2 \rightarrow \alpha.3 \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha.*$

On pourrait alors imaginer que $\alpha.*$ indique la fin des opérations dès l'instant :

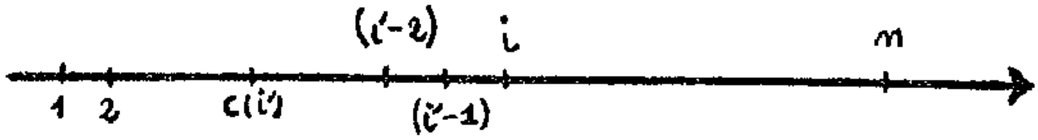
- où la désutilité du centre $c(i'.*)$ de l'espace considéré est plus faible que toute autre,
- et lorsque le moment d'inertie $T^{i'.*}_{c(i'.*)}$ bien que minimum, dépasse une certaine valeur exprimant la contrainte relative au temps de transport. Par exemple $T^{i'.*}_{c(i'.*)} \geqslant 200$.

Cependant, deux arguments viennent infirmer cette procedure :

- le premier est basé sur une démonstration rigoureuse, mais conduit à une représentation purement imaginaire de l'espace,
- le second procède de l'intuition, mais débouche sur une notion plus réaliste de l'espace.

En effet, supposons déterminé $E^{i'.*}-\{i'-1\}$, le sous-ensemble donnant naissance à l'espace cadre d'analyse de centre $c(i')$.

α) Les éléments de l'ensemble E sont représentés dans un espace à une dimension. La convention permettant d'attribuer un indice à chaque lieu est conservée, si bien que les points sont rangés le long d'une droite de 1 à n.

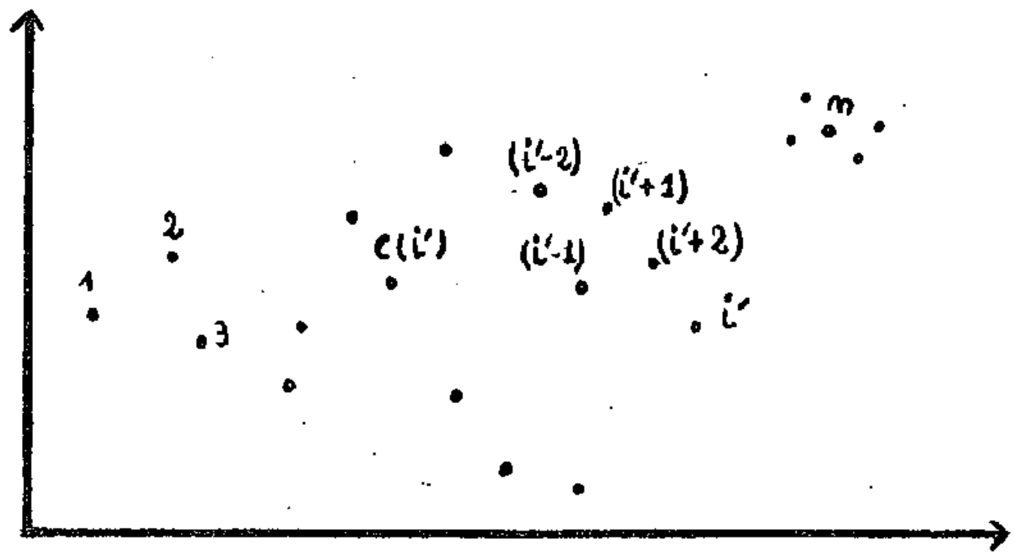


Connaissant le sous-ensemble, comment pouvons-nous représenter l'espace ? Deux cas demeurent possibles :

<u>1 er cas</u> : l'espace cadre d'analyse est schématisé par le segment (1 , i'-2) et par le lieu (i'). i'-2 est exclu du cadre d'analyse présent pour appartenir à un autre regroupement, mais il se situe sur le même "circuit" de ramassage. Dans ce cas, un transport croisé d'élèves ne peut être évité. Cette conséquence inévitable est jugée importune.

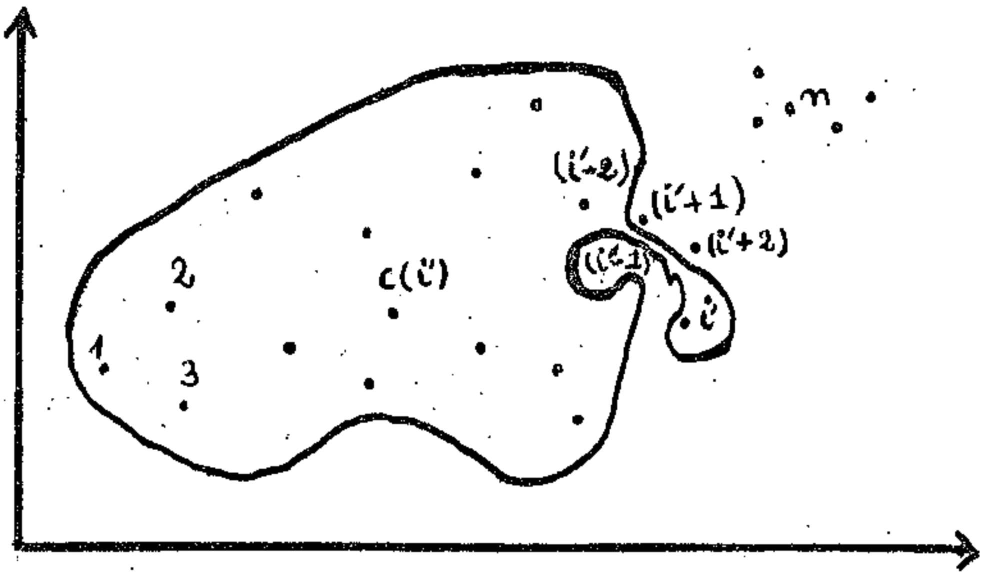
<u>2 ème cas</u> : le segment (1 , i') concrètise l'espace cadre d'analyse. Dès lors surgit une contradiction : i'-1 appartient à l'espace généré par un ensemble de points dont il est exclu par définition.

β) Les éléments de l'ensemble E sont projetés suivant leur position géographique dans un espace à deux dimensions. cf. Infra. C. 1°.



La configuration de l'espace cadre d'analyse dépend de l'examen de deux cas possibles :

<u>1 er cas</u> : tous les éléments de $E^{i'}$ - (i'-1) et <u>seulement</u> ceux-là sont situés à l'intérieur d'un cadre délimité par une frontière tracée d'une façon grossière.



Si la frontière ne respecte aucun tracé rigoureux, elle doit néanmoins exclure de l'analyse tous les points n'appartenant pas à $E^{i'.*} - \{(i' - 1)\}$, en particulier $(i'-1)$, ce qui donne à l'espace une forme fantastique et une très forte probabilité pour que $(i'-1)$ se trouve sur un circuit de ramassage appartenant au cadre ainsi constitué, nous sommes ramenés à la conséquence rencontrée dans le premier cas de l'exemple précédent, conséquence jugée importune.

<u>REMARQUE</u> : le terme "fantastique" trouve surtout son sens lorsque plusieurs lieux sont exclus de $E^{i'.*}$, ce qui est tout à fait possible. Précisons aussi qu'il n'implique aucune nuance péjorative, l'intention que nous avons d'amoindrir sa forme tourmentée a pour seule explication, d'éviter de nombreux transports croisés qui en résulteraient une fois réalisée la partition sur l'ensemble E.

<u>2 ème cas</u> : tous les éléments de $E^{i'.*}$, en particulier $(i'-1)$, et seulement ceux-là, sont situés à l'intérieur d'un cadre délimité d'une façon grossière.

L'espace affecte une forme beaucoup plus régulière, mais la contradiction déjà soulevée lors du premier exemple (deuxième cas) apparaît à nouveau.

c) Position nouvelle du problème :

Théoriquement, il devrait envisager quatre questions, une pour chaque cas.

Logiquement il se ramène à deux, puisque les cas correspondants impliquent des conséquences semblables : la première dont la réalisation serait fâcheuse, concerne les transports croisés ; la seconde conduit à une contradiction.

Pratiquement le porblème se ramène au second cas : comment lever la contradiction ? Faut-il considérer $E^{i',*}$ dans son intégrité ou devons-nous exclure $(i'-1)$ de l'espace cadre d'analyse ? Notons bien que $(i'-1)$ est exclu du regroupement : ce résultat est une donnée, il s'impose à nous. Il n'y a donc aucune raison de l'inclure dans $E^{i'} - \{(i'-1)\}$. La résolution de la contradiction doit se faire au profit du sous ensemble.

En conséquence, $(i'-1)$ sera exclu de l'espace cadre d'analyse. Comment ? Voilà le véritable problème.

d) Une solution possible : le principe d'homogénéité:

α) Dans un espace à une dimension :

- La solution consistant à exclure $(i'-1)$ en introduisant un élément de discontinuité (1) sur le segment (1, i') nous ramène au premier cas. On l'écartera.
- Il demeurt une seule possibilité : l'espace cadre d'analyse se trouve <u>restreint</u> au segment (1, i'-2). En d'autres termes, l'appartenance au cadre d'analyse d'un élément ne possèdant pas la qualité requise (2) pour faire partie du regroupement, justifie le rétrécissement de l'espace à l'élément qui le précède quand bien même <u>celui-ci possède une désutilité totale plus importante que i'</u>.

<u>REMARQUE</u> : dans le cas d'une schématisation de l'espace par une droite, le résultat $D^{i'-1}_{c(i'-1)} > D^{i'-2}_{c(i'-2)}$ est la condition nécéssaire et suffisante dictant l'arrêt des opérations. A cet instant, tous les lieux de l'espace cadre d'analyse, portera sur un regroupement de (i'-2) lieux situés dans un espace homogène, le terme étant pris dans son sens courant, tous les lieux possèdent la même nature, la même qualité fonctionnelle, tous seront regroupés.

---

(1) dans le sens mathématique du terme.

(2) en effet $D^{i'-1}_{c(i'-1)} > D^{i'-2}_{c(i'-3)}$.

Nous allons quitter cette représentation irréalisable et presque impensable de l'espace, mais le principe d'homogénéité du cadre d'analyse sera respecté.

β) Dans un espace à deux dimensions :

Les données du problème se compliquent quelque peu. En effet, quand pourrons-nous affirmer que l'espace est homogène ou hétérogène ? Il convient de déterminer rigoureusement la non-appartenance ou l'appartenance de i'-1 au cadre d'analyse. Si l'espace est hétérogène, comme exclure i'-1 ? Il ne s'agit pas de revenir à la conséquence importune du premier cas en introduisant la notion de "limite grossière".

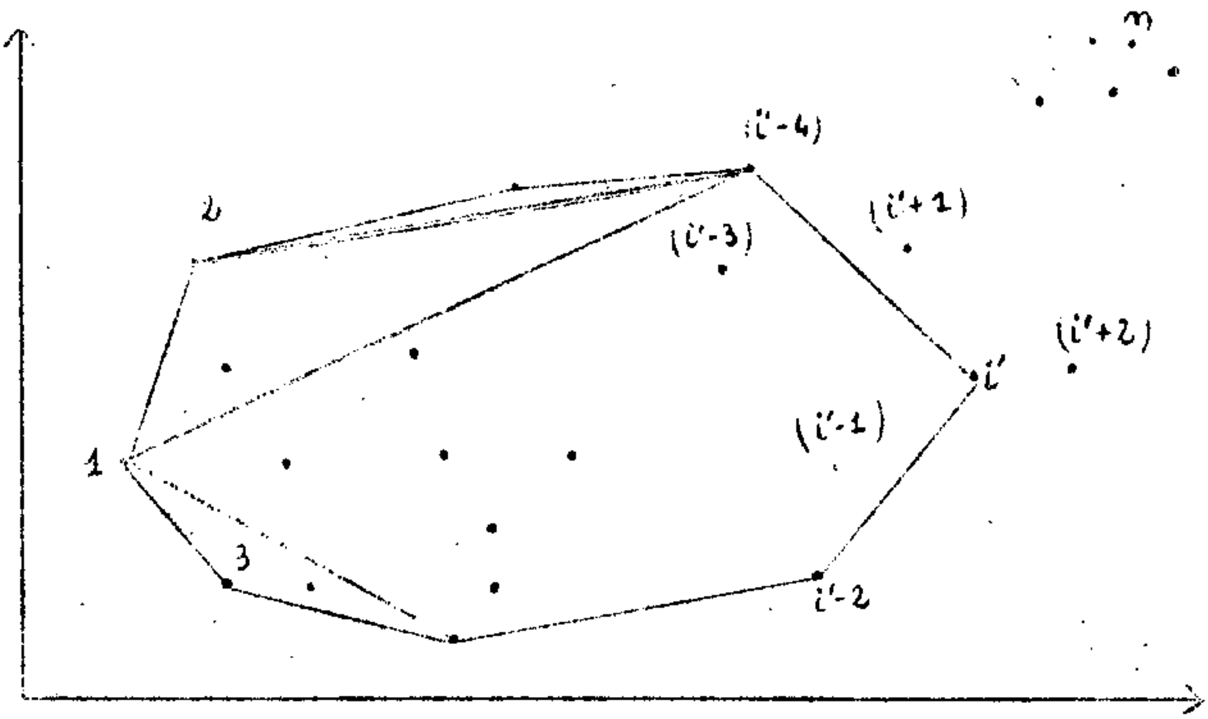
La solution ne peut être donnée qu'après avoir affecté l'espace d'une <u>frontière précise</u> et donc d'une forme.

e) La frontière et la forme de l'espace :

Convenons d'enclore l'ensemble des éléments du sous-ensemble $E^{i'*}-\{i'-1\}$ projetés dans le plan, de la manière suivante :

- Parmi l'ensemble des points représentant les éléments de E, on considère les points relatifs à $E^{i'*}-\{i'-1\}$ d'abscisse (respectivement d'ordonnée) minimum et maximum, que nous relions par les segments de droite. S'il subsiste des points de $E^{i'*}-\{i'-1\}$ à l'extérieur du polygone ainsi construit, le point dont la distance au segment qui lui correspond est maximum, sera relié aux extrémités de celui-ci. Nous obtenons un second polygone qui contient le premier, et s'il se trouve encore des points à l'extérieur, la même procédure sera appliquée jusqu'au moment où tous les points correspondant au sous-ensemble seront compris à l'intérieur du dernier polygone ou situés sur ses côtés.
- Les côtés du dernier polygone obtenu (c'est-à-dire la ligne polygonale fermée qui "enveloppe" les polygones précédemment construits) définissent la frontière de l'espace.

Par construction, les points situés sur celle-ci, appartiennent à l'espace considéré.

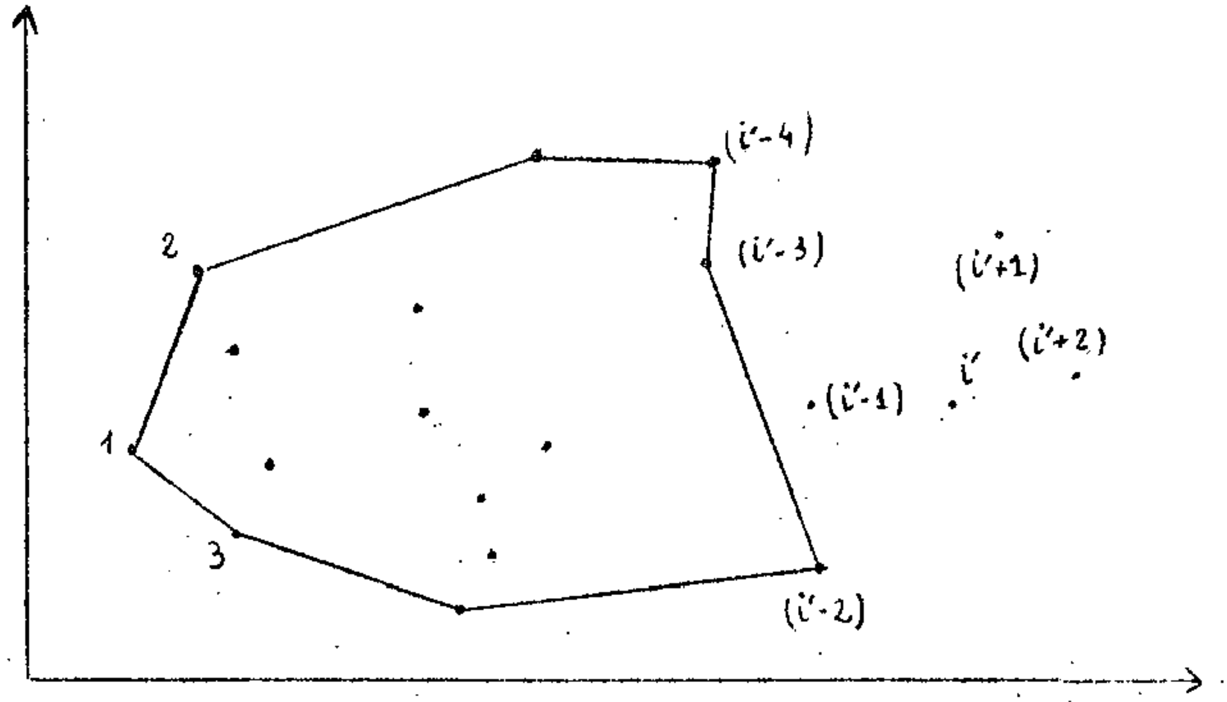


Lespace ainsi délimité conduit nécessairement à un ensemble de points convexes : l'un quelconque de ses côtés prolongé laisse tous les points d'un même côté par rapport à lui. Dans le cas contraire, il serait concave. Mais peu importe sa forme, seule la propriété d'homogénéité doit retenir notre attention .

Tel n'est pas le cas ici. La restriction de l'espace aux éléments qui précèdent immédiatement (i'-1) s'impose, de façon à exclure ce dernier . La façon dont le tronçon de frontière sera tracé, ne montre pas un grand intérêt ; nous pouvons lui imposer qu'il tende le plus possible vers un segment de droite afin d'éviter à l'espace une forme "mouvementée" : il passera par un minimum de points.

Finalement l'espace cadre d'analyse apparaît comme suit :

(voir page suivante).



Il affecte une forme concave ; il serait convexe si $(i'-1)$ se situait à droite de l'axe passant par $(i'-4)$ et $(i'-2)$. De toute façon, l'espace cadre d'analyse est homogène.

f) Conséquence : l'arrêt final des opérations

Si $D^{i'-1}_{c(i'-1)} > D^{i'-2}_{c(i'-2)}$, le lieu $(i'-1)$ est exclu du regroupement. A cet instant, les opérations sont suspendues ; une vérification s'impose car si $(i'-1)$ fait partie de l'espace correspondant au sous-ensemble $E^{i'} - \{(1-i')\}$, les opérations cesseront définitivement. L'espace cadre d'analyse contient alors les éléments de $E^{i'-2}$ et seulement ceux-là même s'il s'avèrait que

$$D^{i'}_{c(i)} - \{(i'-1)\} < D^{i'-2}_{c(i'-2)}$$

-2. LES LIMITES

La méthode est simple : elle repose sur l'interrelation de deux critères qui aboutissent à un indice de désutilité totale.

Mais les calculs sont arbitraires, car le fait de réduire les deux critères en un seul (l'indice de désutilité totale) oblige à simplifier la réalité à l'extrême en vue de définir une unité de mesure(la désutilité). Par exemple la désutilité individuelle induite par l'augmentation du temps de transport est représentée par une courbe exponentielle dont la variable indépendante est la distance kilomètrique. Une fois posée l'unité commune, il faut en outre définir le rapport d'équivalence qui nous permettra d'effectuer la sommation des deux indices. Or l'introduction de ce coefficient d'équivalence repose sur des hypothèses mathématiques très strictes lesquelles seront développées au cours du deuxième chapitre.

En conséquence, nous pouvons justifier la simplicité de la méthode par le dessein de ne pas accroître le degré d'arbitraire des résultats.

-3. LES RESULTATS

Nous proposons de les présenter dans le tableau suivant. Pour chaque sous-ensemble E^{i}, seule la désutilité totale associée au centre de l'espace c(i'), est spécifiée, elle s'écrit :

$$D^{i}_{c(i')} = \min_{l \in E^{i'}} (T^{i'}_{l}) + N^{i'}$$

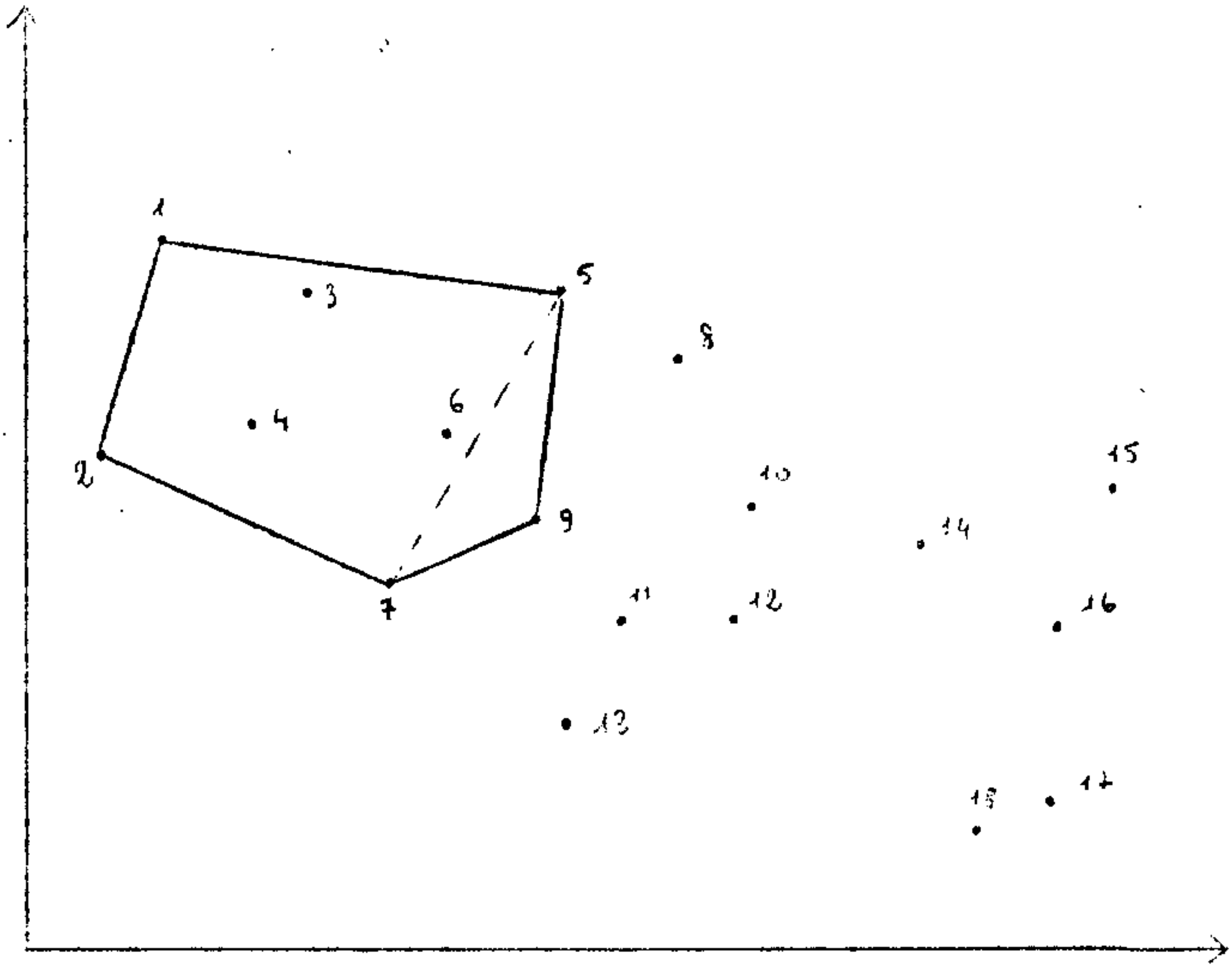
c(i') est choisi comme commune d'accueil provisoire du regroupement des éléments appartenant à E.

i'	$E^{i'}$	$n^{i'}$	$N^{i'}$	l	$T^{i'}_{l}$	$D_c(i')$	$c(i')$
1	(1)	27	130,294	1	0	130,294	1
2	(1,2)	32	119,021				
				1	3,112	122,133	1
				2	16,803		
3	(1,2,3)	47	88,253				
				1	10,827	99,080	1
				2	30,517		
				3	18,458		
4	(1,2,3,4)	56	71,995				
				1	15,456	87,451	1
				2	33,236		
				3	20,518		
				4	18,831		
5	(1,2,3,4,5)	75	43,100				
				1	61,337		
				2	94,314		
				3	33,809	76,909	3
				4	51,666		
				5	107,190		
6	(1,2,3,4,5,6)	76	41,783				
				1	62,824		
				2	96,441		
				3	34,061	75,844	3
				4	52,627		
				5	108,983		
				6	97,249		

i'	$E^{i'}$	$n^{i'}$	$N^{i'}$	l	$T^{i'}_{l}$	$D_{c(i')}$	$c(i')$
7	(1,2,3,4,5,6,7)	95	20,64				
				1	117,549		
				2	117,451		
				3	52,311	72,951	3
				4	57,416		
				5	171,697		
				6	101,598		
				7	161,939		
8	(1,2,3,4,5,6,7,8)	109	9,773				
				1	204,084		
				2	221,430		
				3	96,127	105,900	3
				4	128,109		
				5	183,867		
				6	152,780		
				7	238,46		
				8	420,44		

OBSERVATIONS : $D^{8}_{c(8)} > D^{7}_{c(7)}$

1° Le lieu 8 est exclu du regroupement
2° Est-ce que 8 appartient à l'espace correspondant au sous-ensemble E^{9} -(8).



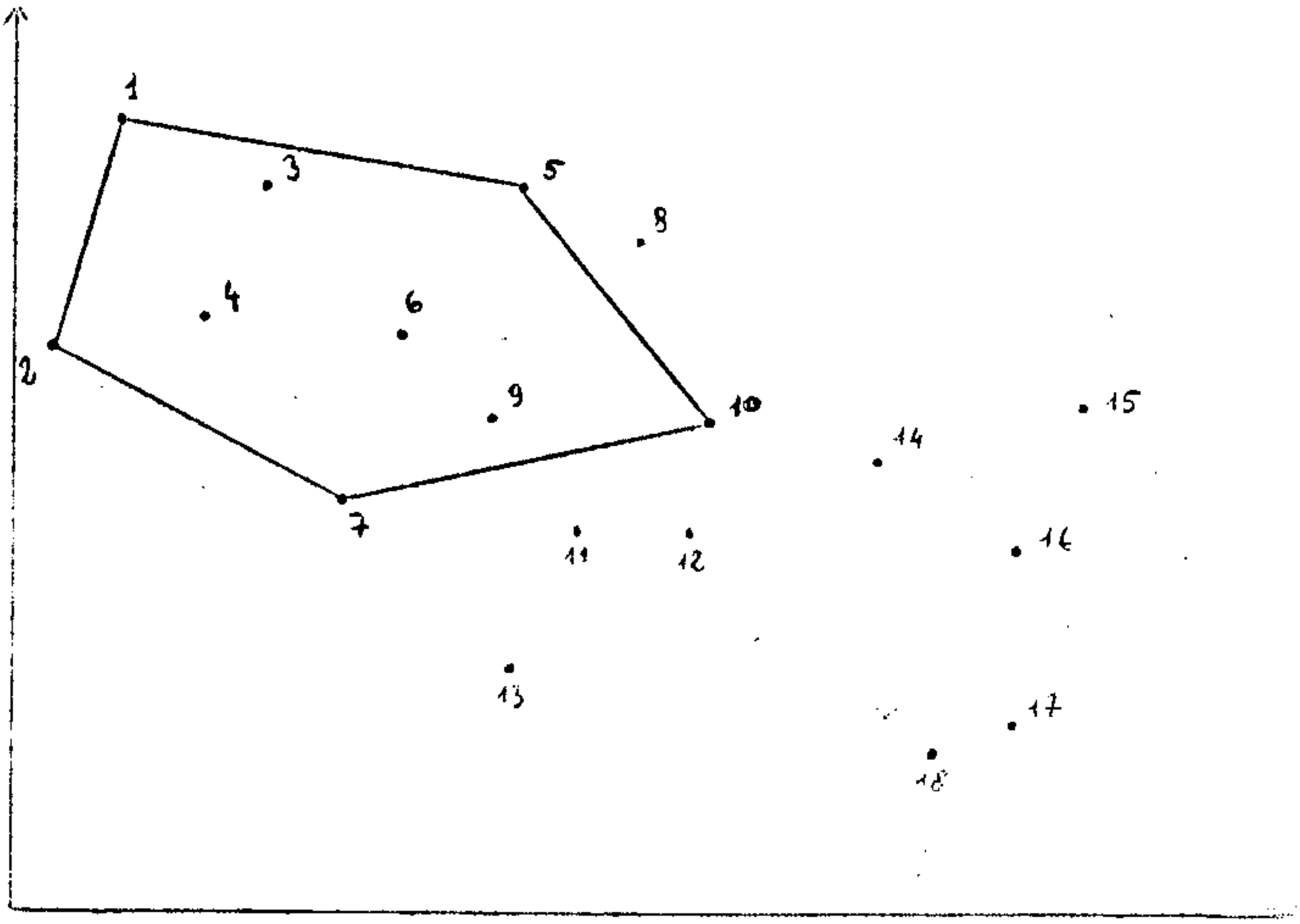
Nous avons reporté dans le plan le calque de la carte au 1/100 000 fournie par le Ministère de l'équipement. La position géographique des points est respectée.

Le lieu 8 n'appartient pas à l'espace correspondant au sous-ensemble $E^9 - \{(8)\}$, en conséquence les opérations doivent se poursuivre. Est-ce que $D^9_{c(9)} - \{(8)\} < D^7_{c(7)}$?

i'	$E^{i'}-i'-1)$	$n^{i'}-(i'-1)$	$N^{i'}-(i'-1)$	1	$T^{i'}_{1}-(i'-1)$	$D^{i'}_{c(i')}-(i'-1)$	$c(i')$
9	(1,2,3,4,5, 6,7,8,9) - (8)	102	14,707				
				1	137,711		
				2	180,962		
				3	59,034	73,741	3
				4	72,300		
				5	190,066		
				6	103,200		
				7	168,339		
				9	199,510		

On constate que $D^{9}_{c}(9)-\{(8)\} > D^{7}_{c}(7)$,

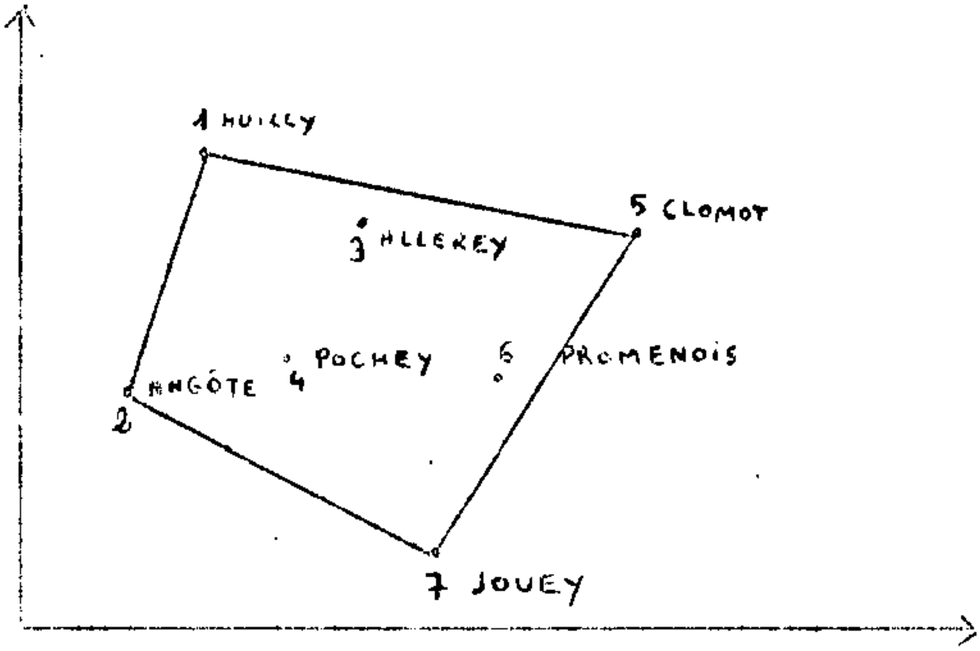
1° <u>En principe</u>, le lieu 9 est exlu du regroupement.
2° Est-ce que 9 appartient à l'espace correspondant au sous-ensemble $E^{10}-\{(8)\},\{(9)\}$?



Le lieu 9 appartient effectivement à l'espace assimilé au sous-ensemble $E^{10}-\{(8)\}-\{(9)\}$; en conséquence <u>les opérations cessent définitivement</u> quand bien même $D^{10}_{c(10)}-\{(8)\}-\{(9)\}< D^{7}_{c(7)}$.

<u>REMARQUE</u> : l'attribution des indices lieux aux points de l'espace, étant peu rigoureuse il est bon de vérifier la non appartenance du lieu 9 à l'espace correspondant à $E''-\{(8)\}-\{(9)\}-\{(10)\}$.

En conclusion, les éléments à regrouper spécifiés par la méthode, sont ceux du sous-ensemble $E^{7}=\{(1,2,3,4,5,6,7)\}$. L'espace assimilé à cet ensemble de points est <u>homogène</u> et affecte la forme suivante :



ESPACE CADRE D'ANALYSE

Grâce aux moments d'inertie des points appartenant à l'espace cadre d'analyse, nous pouvons dresser la liste des communes d'accueil dans un ordre décroissant de préférence.

Moments d'inertie	Communes d'accueil provisoires	Rangs
52,311	3. ALLEREY	1
57,416	4. POCHEY	2
101,598	6. PROMENOIS	3
117,451	2. ANGOTE	4
117,549	1. HUILLY	5
161,939	7. JOUEY	6
171,697	5. CLOMOT	7

REMARQUE : Si le lieu 8 était un hameau de la commune 7, sans doute aurait-il été préférable de ne pas l'exclure du cadre de l'analyse pour des raisons d'ordre administratif. De toute façon, il n'est pas à craindre que le regroupement se fasse avec un lieu de plus ou de moins étant donné le caractère arbitraire de la solution optimale dégagée par la méthode précédente. Nous reviendrons plus longuement sur le sens qu'il convient d'accorder au terme "optimum" (cf. Conclusion du chapitre 2). Pour l'instant, le chapitre 1 est resté fidèle au rôle qui lui était assigné : donner un cadre d'analyse aux méthodes multicritères. Dans la conclusion générale, nous montrerons que le modèle utilisé pour délimiter le premier sous-ensemble (regroupement) peut servir à l'établissement d'une partition sur l'ensemble de départ (celui-ci pouvant très bien s'identifier à l'espace national rural). Un article à paraître dans Regional and Urban Economics fera le point sur la question.

. Le modèle proposé détermine simultanément :

- la taille du regroupement,
- la commune d'accueil.

. Les lieux à regrouper sont situés dans un espace qui possède :

- une forme, laquelle devra assurer la propriété suivante :
- une propriété = homogénéité (à ne pas confondre avec le sens entendu par les économistes spatiaux).

. En outre, chaque lieu de cet espace est caractérisé par :

- ses coordonnées géographiques,
- un moment d'inertie.

Le rôle tenu par ce dernier au sein du modèle est grand puisqu'il nous dicte le choix de la commune d'accueil (Allerey).

La meilleure façon de vérifier la stabilité de la solution consiste à changer de modèle : l'emploi des méthodes multicritères paraît tout indiqué.

CONCLUSION DU CHAPITRE 1

" Le choix de la commune d'accueil est fonction du réseau routier existant puisque cette commune doit être reliée facilement à toutes les autres. Mais il est fonction également des effectifs existants" (1). Le lieu qui possèdera l'inertie la plus faible eu égard aux autres lieux de l'espace cadre d'analyse sera celui qui :

- déplacera le moins d'élèves possible. Autrement dit, l'effectif caractérisant ce lieu sera important.
- sera relié le plus facilement aux autres.

Dans cette optique, Allerey est choisi comme commune d'accueil. C'est le lieu qui possède le moment d'inertie le plus faible.

Cependant, nous tenons ce choix pour provisoire, car nous nous demanderons si la commune d'accueil ne doit pas être sélectionnée en fonction d'autres critères et notamment en fonction de points de vue qualitatifs, dans quel cas la méthode des moments d'inertie s'avèrera insuffisante. Le critère "inertie" ne sera plus le seul à dicter le choix.

Pourquoi conserver le critère "inertie" en vue d'une prochaine sélection ? Ne serait-il pas préférable de déterminer le circuit de ramassage relatif au regroupement (ou plus exactement de simuler un circuit de ramassage pour chaque lieu pris tour à tour comme commune d'accueil) plutôt que de conserver un moment d'inertie très général ?

---

(1) " Rapport sur un regroupement systématique des écoles primaires rurales" page 9 - op. t.

L'observation du réseau de routes révèle que beaucoup doivent être exclues d'un circuit de ramassage déterminé a priori vue l'étroitesse de celles-ci. Dans de nombreux cas, il serait sans doute plus avantageux de regrouper un lieu quitte à déplacer les élèves par un ramassage particulier. Dans le cadre de notre travail, nous serions incapables de postuler si un lieu donné doit faire partie ou non du circuit de ramassage commun au regroupement : une étude préalable évaluant les avantages et les inconvénients de l'alternative pour chaque lieu serait nécessaire.

Pour cette raison, nous maintenons le critère "inertie" en nous réservant la possibilité de dynamiser la notion.

CHAPITRE II : LES ELEMENTS DE L'ANALYSE

A) Plan du chapitre

1) Le but de l'analyse consiste à choisir une commune d'accueil parmi un ensemble de sept lieux. Ce choix doit tenir compte de la "qualité" des lieux selon plusieurs critères, lesquels seront élaborés au cours de la section 1.

2) En établissant les échelles, la section 2 se propose de dresser le tableau à partir duquel on pourra tirer une partie de l'information nécéssaire aux différentes méthodes utilisées au cours de la prochaine analyse.

3) L'information sera complète une fois l'importance des critères déterminée. Tel est le but assigné à la section 3.

B) Une question de logique

- L'aboutissement de la section 1 concerne la proposition d'une école que nous estimons"idéale". Elle procède d'une démarche personnelle (alimentée cependant de discussions menées avec des enseignants)..

La section 3 au contraire, tente de concilier la participation de plusieurs jurys (1) pour déterminer l'importance des critères avancés à la section 1.

Finalement, l'école "idéale" résultera de ces deux démarches. Dès lors, on peut se demander si cette procèdure qui consiste à allier ces démarches, est logique : est-il convenable d'inviter certaines personnes à se prononcer sur des critères qui nous sont propres ? En effet, si nous ajoutons des critères qui jusqu'à présent nous paraissaient inutiles, il est tout à fait possible que l'importance relative des poids des critères de la liste initiale soit considérablement modifiée,

---

(1)Comme nous le verrons, il ne s'agit pas d'échantillons, la détermination de ceux-ci nécessiterait un cadre beaucoup plus large que ce présent mémoire.

Il aurait été sans doute plus logique d'adopter l'alternative suivante : élaboration des critères et détermination des coefficients de pondération d'une façon subjective, ou d'une manière objective.

- Malgré tout, l'intervention de jurys dans un deuxième temps peut s'expliquer par deux considérations :

a) ne pas mener l'analyse à partir d'une école qui ne semblerait idéale qu'à une seule personne,

b) lorsque les critères furent élaborés, il nous a semblé très difficile de leur affecter des poids. Ils découlent presque tous d'une réflexion générale dans laquelle les différentes étapes nous paraissent d'une même importance.

REMARQUE : Comment élaborer les critères et déterminer les coefficients de pondération d'une façon objective ? Nous proposerons quelques éléments de réponse dans la conclusion générale en nous aidant de l'analyse factorielle des correspondances exposée au dernier chapître

SECTION 1 : L'élaboration des critères

Les critères qui serviront de fondement à la future analyse sont déduits d'une réflexion portant sur l'école, or nous n'avons pas la prétention de repenser ici toute l'action éducative, Le but assigné à cette section n'a d'autre possibilité, que celle de replacer dans un contexte très général quelques considérations personnelles partagées le plus souvent avec certains enseignants.

-1. Les deux stades de la réflexion :

A) Les principes généraux

1) Développer les aptitudes de l'élève en suscitant l'intérêt :

Il ne suffit pas de transmettre à l'élève une somme de connaissances . et seulement qu'elles, comme le signale FERRIERE, ce type d'école "doit disparaître" (1).

Il convient surtout de développer les aptitudes de l'enfant en le faisant agir. Et cette activité selon F. CHATELAIN, aura comme point de départ l'intérêt de l'enfant : "l'intérêt est le noeud de l'éducation nouvelle, son principe fondamental" (2). Il serait donc souhaitable de rendre attrayantes des matières qui ne le sont pas. Par exemple, la leçon de sciences naturelles pourrait dans une certaine mesure, se donner en pleine nature : la présence d'une petite rivière ou d'une forêt (3) importe chez la plupart des instituteurs visités.

2) Ouvrir les portes de l'école :

a) C'est bien parce que les portes de l'école sont restées longtemps fermées sur la vie que le rapport LANGEVIN-WALLON, en 1947, s'exprimait en ces termes : "l'école semble un milieu clos, imperméalbe aux expériences du monde . Le divorce entre l'enseignement scolaire et la vie s'accentue par la permanenee de nos institutions scolaires au sein d'une société en voie d'évolution accélérée".

Il serait donc vivement souhaitable que l'enseignant emmène le plus possible ses élèves à la découverte de ce monde sans cesse en évolution :

---

(1) FERRIERE : "Ecole active" Op. cit. p. 210
(2) CHATELAIN : "Principes de l'éducation nouvelle" page 15
(3) Les critères figurent directement dans le texte. Ils seront rappelés, pour l'instant nous les soulignons.
(4) In "L'école de demain reste à faire" Op. Cit. p. 38 - J. CAPELLE.

visites de musées, de crèches ... dans tous les milieux où se passent des faits humains ; visites d'usines, de magasins ... dans tous les milieux où surviennent des faits et des actes économiques. Dans le cadre de notre étude, Arnay-le-duc pourra constituer cet environnement. Un lieu selon ce point de vue, sera d'autant mieux situé que sa <u>distance le séparant d'Arnay-le-duc sera plus faible</u>.

b)En ce qui concerne l'ouverture des portes de l'école <u>à</u> la vie, une certaine retenue fut constatée chez les enseignants pour qui, cependant, le fait apparaît très important. En effet, on a pu dire que jadis le développement intellectuel moral et la formation civique de l'enfant, s'effectuaient dans le milieu familial et à l'école. Aujourd'hui " le monde extérieur a fait irruption dans ces horizons familiaux en une effraction conquérante, dominatrice et irréversible "(1). Faut-il ouvrir les portes de l'école à ce monde ? La réponse à cette question déborderait le cadre de notre exposé. Toutefois nous pensons que l'école ne doit pas s'écarter totalement du "monde extérieur" : on favorisera une commune dont l'école est localisée au <u>centre du village</u>, attendu qu'elle pourrait par ce fait constituer un centre d'animation proche des habitants, et <u>on écartera toutes les nuisances majeures</u> qui pourraient l'entourer (bruit, certaines formes de publicité ...).

L'intégration de l'établissement doit donc s'accomplir dans un environnement déterminé (proximité d'autres lieux d'épanouissement, de vie en commun...)

3) <u>Organiser la vie en commun</u> :

Si "l'ouverture des portes de l'école" demeure un fait important il n'en reste pas moins que la vie même à l'intérieur de l'école doit s'organiser en commun.

---

(1) cf. en ce sens le chapitre 4 de "L'Education Nationale" J.L.CREMIEUX-BRILHAC.

La salle de classe doit être une vraie communauté enfantin; c'est en ce sens que nous interprèterons le mot de J. PIAGET : " La coopération entre les enfants est pour leur développement intellectuel et moral, un facteur irremplaçable "(1).

Comment favoriser cette communauté enfantine ? les moyens sont simples et divers, par exemple, un foyer où les enfants pourraient se réunir serait le bien venu : le nombre de locaux pouvant être affectés à ces fins éducatives est un facteur qui favorisera le choix de la commune d'accueil. Mais dans l'immédiat, les objets anonymes de l'école peuvent devenir la propriété des enfants qui en prennent grand soin : la cour de l'école est entretenue, un espace suffisant et bien agencé où les élèves pourraient s'adonner à la pratique du jardinage est mis à leur disposition. L'enfant se préparerait d'autant mieux à son rôle social.

Toutefois, cette tendance à la socialisation ne doit pas se faire au détriment de l'individualisation de la personne. Ces deux buts ne paraissent pas se contredire comme nous allons le montrer.

4) De l'individualisation des études et des fonctions :

a) Il est un fait que chacun reconnaît : l'enfant doit pouvoir progresser à sa manière et à sa mesure. Or dans bien des cas, on constate une inadaptation entre l'enseignement dispensé collectivement et ceux qui le reçoivent : pour certains il est très difficile de suivre cet enseignement, pour d'autres, au contraire il paraît aisé. Deux remèdes sont souvent proposés :

α) Ainsi J. CAPELLE, dans son ouvrage (1) dénonce plusieurs fois le fait que" les cloisons entre les classes de chaque tranche d'âge, surtout au début, doivent être perméables pour permettre des transferts.

(1) J. CAPELLE, "l'Ecole de demain reste à faire" p. 58.

Et ces derniers ne doivent pas avoir le caractère d'une sanction ou d'une humiliation" (1).

a) Une deuxième issue consiste à développer les activités individuelles où les travaux manuels auraient une place prépondérante. A cet effet, des salles spécialisées seraient annexées à l'école.

Finalement, cette individualisation des études impliquerait une souplesse des structures pédagogiques qui entraînerait à son tour une individualisation des fonctions au niveau des instituteurs.

b) En effet, les enseignants pourraient choisir parmi toutes ces tâches (enseignement général, sport, musique ...) celles qui conviennent le mieux à leur goût et à leurs aptitudes.

Chacun pourrait aller tout comme l'enfant, "à sa manière et à sa mesure". Il ne serait peut-être pas souhaitable que la spécialisation soit totale : une activité dominante serait offerte à chaque enseignant, lequel serait aidé par l'existence de moyens techniques (matériel éducatif, moyens audio-visuels, etc...) Dans la mesure où la commune participe à l'achat de ce matériel, il ne sera pas indifférent de choisir une commune d'accueil où les dépenses municipales par élève constituent un poste important.

B) Les règles spécifiques

Elles concernent le temps de transport des élèves et la situation existante des communes dans le but de minimiser les coûts du regroupement

1) Nécessité d'une distance opportune :

à parcourir par les élèves pour se rendre à la commune d'accueil.

---

(1) J. CAPELLE : "L'école de demain reste à faire" page 58.

Dans cette optique la commune la "meilleure" est située au centre de l'espace cadre d'analyse ; cf. <u>moments d'inertie</u> (chapitre 1).

2) <u>Nécessité d'une quantité minimale d'infrastructure</u>

Dans la mesure où <u>l'état de conservation des locaux</u> est satisfaisant, les élèves pourront utiliser les <u>bâtiments existants</u>.

Un local proche de l'école pourra servir de <u>cantine</u>.

C) Règles notoires

Il est encore des principes ou des règles évidents que nous n'avons pas présentés puisqu'ils s'imposent à nous d'une façon naturelle :

- pratique du sport
- aménagement des récréations etc ...

Bien entendu, la commune d'accueil devra mettre une certaine quantité d'espace à la disposition des élèves. <u>Le prix des terrains</u>, dans la mesure où il est bas favorisera la sélection de la commune d'accueil.

D) Conséquences

1) Justification du type de regroupement en "commune d'accueil".

Nous avons vu qu'il était possible de concevoir deux types de regroupement différents : la formule de la commune d'accueil et celle du regroupement en communes spécialisées. Dès l'introduction nous avons choisi la première formule. Outre les raisons déjà avancées, il s'avère que la "commune d'accueil" allie au mieux les règles et principes d'une école que nous estimons "idéale".

- Les élèves sont répartis par classes de niveau homogène, l'enseignement pourra même être adapté à chaque élève, en rendant "perméables les cloisons entre les classes de chaque tranche d'âge".

- Il n'est pas évident que des enseignants perdent leur emploi à la suite des fermetures des autres écoles puisqu'il y aurait individualisation des fonctions.

- La commune d'accueil pourrait alors rattraper le retard accumulé sur l'école urbaine en disposant d'un équipement analogue : foyer, cantine, installations sportives ...

D'une façon générale, nous pensons que l'application de ces principes est un moyen de contribuer aux recherches sur la démocratisation de l'enseignement.

2) <u>Enoncé de la "fonction implicite"</u> :

Nous tenterons de résumer ce qui précède dans les termes suivants, ils constituent la "fonction implicite" qui nous permettra de ranger les lieux dans un sens déterminé, selon chaque critère. Cette fonction que nous proposons d'optimiser s'énonce en deux propositions :

a) Le choix de la commune d'accueil devra tenter de concilier deux exigences :

- celles de l'économie moderne : intégration de l'Homme dans le milieu technique,

- celles de l'espèce : ré-intégration de l'Homme dans le milieu naturel.

b) Cette conciliation devra s'effectuer avec le maximum d'économies :

- d'argent
- d'effort

-2. La liste nominative des critères

Initialement 21 critères furent avancés à partir de cette réflexion, mais l'observation sur le terrain nous a conduit à en retenir seulement 14. En effet, certains critères auraient affecté les 7 lieux du même rang, soit parce que le calcul nous y contraignait (notamment pour le critère "entretien du réseau de communication") , soit parce que la propriété révelée par le critère était inexistante pour tout lieu (en particulier pour le critère "installations sportives existantes").

Nous verrons dans le chapître 5 de la seconde partie, qu'il aurait été raisonnable d'en éliminer encore

La liste s'établit alors de la façon suivante :

C1 : inertie actuelle
C2 : inertie future
C3 : prix des terrains
C4 : dépenses municipales par élève
C5 : taille de l'école existante
C6 : état de conservation des locaux
C7 : nombre de locaux pouvant être affectés à des fins éducatives (foyers, salles de travaux manuels...).
C8 : présence d'un local pouvant servir de cantine
C9 : espace libre à l'entour de l'école (1)
C10 : configuration de C9 (1)
C11 : distance séparant le lieu d'Arnay-le-duc
C12 : nuisances minimales
C13 : position de l'école par rapport au centre du village
C14 : présence de rivières et de forêts.

En même tempsque sera précisé le sens de certains critères, nous rendrons compte de l'expression de l'ensemble (section 2 : s/section 3), puis nous établirons une classification (section 3 : s/section 1)

SECTION 2 : l'établissement des échelles

Le problème se pose différemment suivant que l'on suppose pouvoir agréger les critères en un seul ou, au contraire, vouloir conserver l'individualité de chacun d'eux. Dans le premier cas, l'établissement des échelles - nous entendons l'attribution d'équivalents numériques aux lieux - ne peut se faire que sous conditions d'hypothèses très strictes. Le second cas nécessite des modalités beaucoup plus souples, en revanche la "distance" séparant deux lieux le long d'une échelle donnée sera peu satisfaisante.

Le tableau 1 présenté en fin de section, sera élaboré en fonction du premier cas et servira de tronc commun aux différentes méthodes de l'analyse. Précisons que l'information sera totale lorsque les coefficients de pondération seront donnés : le tableau 1 sera complété à la fin du présent chapître et deviendra le tableau 2.

SOUS-SECTION 1 : Introduction d'une notion de proximité

-1. Introduction au problème : comparaison des lieux suivant un critère donné :

A) Appréciation d'un lieu selon un critère

1) Chacun des critères élaborés précédemment revêt une certaine signification, par exemple :

---

(1) Rappelons qu 'il nous faut un espace suffisant et bien agencé pour aménager, séparer les récréations, pratiquer le jardinage etc...

- C3 : évaluation d'un facteur quantitatif, "le prix des terrains".
- C6 : appréciation d'un facteur qualitatif, "l'état de conservation des locaux".
- C14 : existence ou non d'une caractéristique ou d'une propriété "présence de rivières et de forêts"

2) Désignons par K_j l'ensemble des résultats auxquels le critère C_j peut conduire et par le terme "état" un des éléments de K_j. Exemples : pour C6, on pourra retenir comme ensemble d'états possibles, l'ensemble K_6 = (très bon, bon, moyen, passable, médiocre, mauvais). Quant à C14, l'ensemble peut s'écrire tout simplement K_{14} = (oui, non).

3) Supposons qu'il soit possible d'établir une correspondance entre l'ensemble des lieux E et chaque état de K_j pour tout critère C_j. Plus rigoureusement cette correspondance revêt la forme d'une application χ_j qui, à chaque lieu $i \in E$, fait correspondre un état déterminé et unique $\chi_j(i) \in K_j$.

Cette correspondance est donc traduite par les 14 applications :

$$\chi_j : E \longrightarrow K_j$$
$$j = 1 \text{ à } 14$$

Ainsi, grâce à χ_6 on associe au lieu i l'état $\chi_6(i)$ - par exemple "bon" - appartenant à l'ensemble K_6.

Au lieu i' peut être associé $\chi_6(i')$, semblable ou non à l'état du lieu i, mais pour la suite nous supposerons que i' est apprécié selon l'état "passable".

Dès lors existe-t-il un lien qui mérite d'être considéré entre ces deux appréciations (états) ?

B) Notion d'échelle

1) Nous admettrons que chaque K_j est muni d'une structure (existence d'un lien entre les divers états relatifs à un même critère) et que ce lien définit sur chaque K_j une structure d'échelle : les états sont en nombre fini et sont tous rangés dans un ordre auquel on attache une certaine signification.

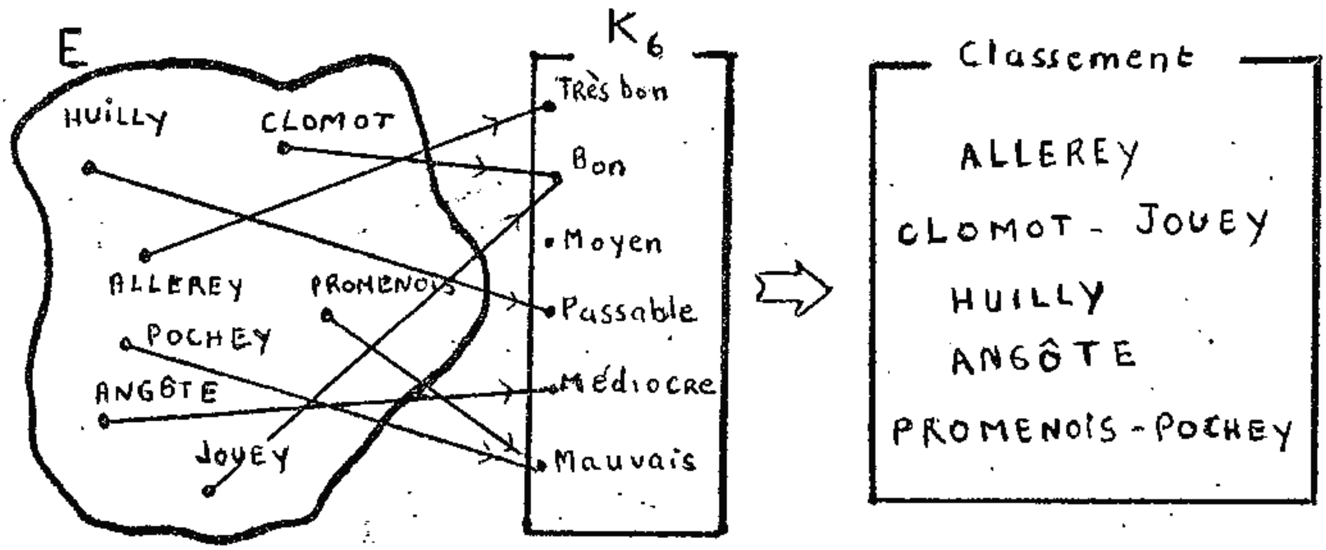
2) On supposera aussi que pour chaque critère, le sens favorable qui doit servir à fonder la sélection finale (ELECTRE I) ou le classement final (sommes pondérées) est indiqué par le sens montant des échelons. Dès lors, qui de l'état "bon" ou "passable", si l'on considère l'échelle K6, sera situé le plus "haut" ? La réponse à cette question nous est dictée par le deuxième proposition de la "fonction implicite" (maximum d'économies) : "bon" constitue un échelon situé plus haut que "passable", en conséquence $\gamma_6(i) > \gamma_6(i')$ c'est-à-dire que le lieu i est jugé "meilleur" que i' selon le critère C6. En effet, si l'on veut réaliser le maximum d'économies, un lieu possèdant une école en bon état sera préféré à celui dont l'état de l'école n'est que passable.

Finalement, la structure de chaque échelle se trouve ordonnée d'après la "fonction implicite" dont les termes apparaissent, pour chaque critère, comme un critère latent.

C) Classement de tous les lieux selon un critère

D'après ce qui précède nous sommes maintenant en mesure de ranger tous les lieux en un préordre complet selon chaque critère : tous les lieux peuvent être comparés deux à deux (ce qui justifie le terme "complet") sans que la possibilité d'obtenir des ex-aequo soit exclue (préfixe "pré").

En ce qui concerne C6, l'enquêteur chargé de l'étude pourra établir le classement suivant :



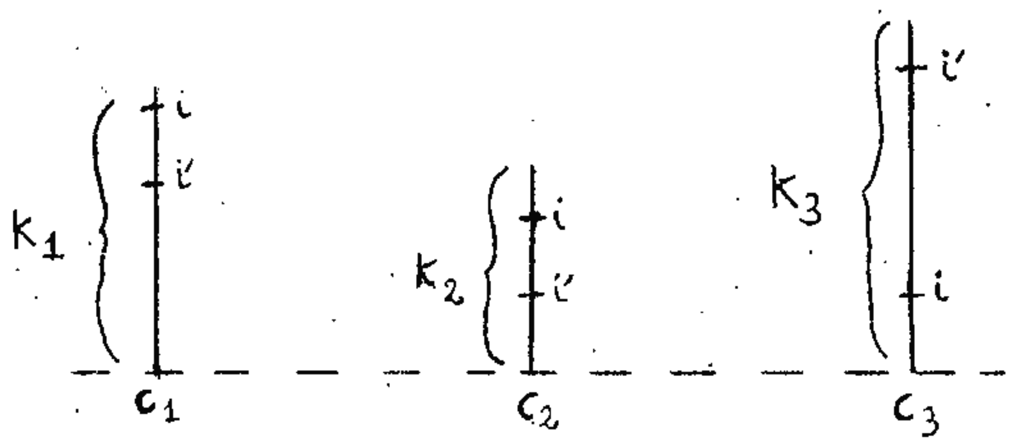
$$\boxed{\gamma_6 : E \dashrightarrow K_6}$$

-2. Position du problème face à deux méthodes multicritères : ELECTRE -I et sommes pondérées :

A) Les données du problème sont communes aux deux méthodes

- Deux lieux i et i' sont classés respectivement d'après les critères C1, C2, C3, comme le montre le schéma suivant,

- K1, K2 et K3 sont données.



B) Mais les deux méthodes le considèrent différemment :

1. Quant au but :

- ELECTRE-I compare les lieux deux à deux selon chaque critère, en vue d'éliminer la majeure partie d'entre eux (dans la mesure où les lieux sont plus nombreux que ci-dessus) pour en sélectionner un ou quelques-uns.

- La méthode des sommes pondérées considère les lieux dans le but de les ranger dans un préordre complet.

2. Quant au principe :

- ELECTRE-I se réfère à un problème multidimensionnel
- la méthode des sommes pondérées considère un problème unidimensionnel.

Pour l'instant, attachons toute notre attention sur ce dernier point.

-3. Le véritable problème : multidimensionnalité et unidimensionnalité :

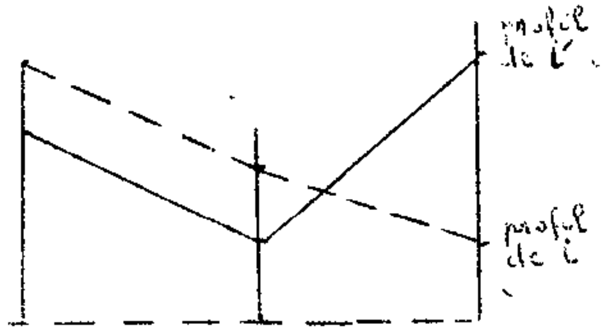
A) Le principe d'ELECTRE-I : "conserver l'intégrité de chaque point de vue (critère)" (1) :

---

(1) ELECTRE : note de travail n° 49 - page 2 - " Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples ". R. BENAYOUN, B. ROY, B. SUSSMANN.

1. Comment ?

- Un lieu peut être repéré suivant la place occupée sur une échelle déterminée, mais si on examine ce même lieu selon les 14 critères ce que fait ELECTRE-I, on voit dès lors se "profiler" les positions de ce lieu dans les 14 échelles : cette suite de repères d'échelons est appelée <u>profil</u> du lieu.



- Profils des lieux i et i' en fonction des critères C1, C2 et C3

Autrement dit, le profil d'un lieu est obtenu en lui associant une suite de 14 états (ici 3) pris respectivement dans K1, K2 ..., K14 (ici K1, K2, et K3), c'est-à-dire un élément du produit cartésien : K = K1 x K2 x ... x K14 (ici K1 x K2 x K3).

L'examen d'un lieu selon <u>tous</u> les critères consiste à lui associer un profil, expression de son état <u>multidimensionnel</u>. Remarquons que "l'introduction de ce concept traduit notre volonté de bien prendre en compte individuellement chacun de ces points de vue" (1).

- Qui de i ou de i' possède le "meilleur" profil ? Sur le schéma ci-dessus i est placé plus haut que i', donc meilleur deux fois sur trois. En supposant pour l'instant que les trois critères soient d'importance égale peut-on pour autant admettre que i est meilleur que i' ? Il n'en est pas question car il faut tenir compte de l'ampleur de la différence $\gamma_3(i') - \gamma_3(i)$ qui paraît très importante ici.

(1) cf. note 1 page 65.

Cette remarque nous introduit directement au coeur de la méthode qui sera développée ultérieurement. Mais pour l'instant, le bon sens nous conduit à rejeter la sélection définitive du lieu i : pour C1 et C2, i est jugé meilleur que i', mais pour C3, i' est meilleur que i et <u>beaucoup plus</u> que ne l'était i, par rapport à i', selon les deux critères précédents. Il convient alors d'apprécier cette différence.

2. Conséquence

Il apparaît nécessaire d'associer aux échelons de cette échelle K3 des <u>équivalents numériques</u> afin de pouvoir apprécier l'ampleur de $\gamma_3(i') - \gamma_3(i)$. Par exemple si $\gamma_3(i') = 16$ et $\gamma_3(i) = 4$, on dira tout simplement que le critère C3 refuse la sélection de i et que son désaccord se manifeste par un écart de douze points, mais en aucun cas on pourra affirmer que i' est quatre fois supérieur à i. <u>On ne s'intéresse qu'à l'écart des notes et non à leur rapport</u>, néanmoins on peut quand même se faire une idée d'une certaine proximité des deux lieux le long de l'échelle.

Ainsi ELECTRE-I rejette la notion de métrique pour ne conserver qu'une <u>pseudo-métrique</u> basée sur une notinn de <u>proximité relativement grossière</u>.

3. Sur le plan de la pratique comment traduire cette notion de proximité "grossière" ?

"Il paraît commode, lorsque l'on n'a aucune information initiale, de choisir un intervalle <u>constant</u> entre échelons consécutifs d'une même échelle" (1).

---

(1) ELECTRE, note de travail n° 49, page 33, Op. cit.

Mais supposons maintenant que C3 soit un critère peu important, est-il normal que son désaccord suffise à empêcher la sélection de i ? Certainement pas. Il faudra alors trouver un moyen pour réduire l'amplitude de son désaccord. En général, on veillera à ce que l'introduction de cette pseudo-métrique ne se fasse pas d'une manière arbitraire : elle doit reflèter l'importance du critère considéré. Dès lors le moyen est simple : toutes les échelles associées aux différents critères possèderont le <u>même nombre d'échelons</u> et on veillera à ce que <u>l'intervalle soit plus faible le long des échelles traduisant des critères peu importants</u>, ainsi pourra être évité le cas où "un monsieur sans importance (ici C3) mais très bruyant, évite par ses interventions incessantes, l'élection d'un condidat ayant déjà rallié la majorité des suffrages" (1).

<u>REMARQUE</u> : afin d'obtenir des échelles possèdant toutes le même nombre d'échelons, on complètera celles qui ne contiennent pas le plus grand nombre d'échelons, par des échelons supplémentaires fictifs correspondant à des appréciations que l'on n'attribuera jamais. Si, par exemple, C3 est moins important que C2, on pourrait proposer les échelles suivantes :

	K2
très bien	20
bien	15
moyen	10
mauvais	5

	K3
très bien	15
bien	12
moyen	9
mauvais	6

Il est évident que un échelon de l'échelle K2 n'est pas comparable à un échelon de même position de l'échelle K3.

---

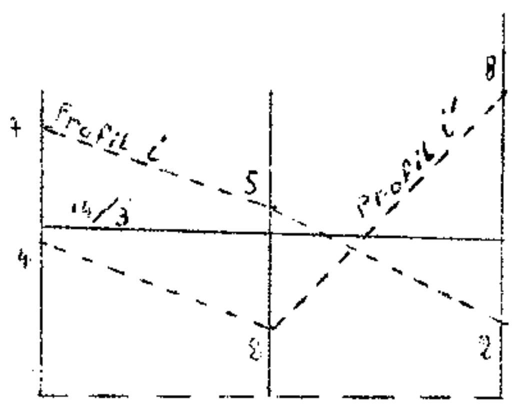
(1) BERNARD ROY - Direction scientifique de la SEMA - Synthèse et formation n° 50 - page 99.

B) <u>Le principe de la méthode des sommes pondérées</u> : <u>ramener le problème à une seule dimension en fondant les différents critères en un seul</u> :

1. Comment ?

Chacun des critères élaborés précédemment revêt une certaine signification (cf. -1.). On devra définir une <u>unité commune</u> grâce à laquelle on pourra fondre ces multiples points de vue en un seul critère. Exemple : dans le cadre du premier chapitre (section 2), nous avons défini un indice de désutilité totale (D) comme étant la somme d'un indice de désutilité, relatif aux effectifs (N) et d'un indice exprimant la désutilité suscitée par le transport (T). Pourtant, les termes "transport" et "effectifs" expriment des réalités différentes. Cependant, nous avons agrégé ces dernières en une seule (D) par l'intermédiaire d'un dénominateur commun que nous avons appelé "désutilité".

Par cette procédure, l'intégrité de chaque critère n'est plus respectée et le profil d'un lieu qui représentait son état multidimensionnel, se trouve maintenant "résumé" par une droite (moyenne pondérée) comme le montre le graphique ci-dessous.



<u>REMARQUE</u> : on suppose que les poids des critères sont égaux à un pour l'instant.

$\frac{14}{3}$ = moyenne pondérée de i = moyenne pondérée de i'.

Comme l'indique l'exemple ci-dessus, des lieux présentant des profils différents peuvent conduire à des sommes pondérées (ou moyennes pondérées) semblables. Ils seront jugés équivalents : chaque lieu renferme la même quantité de ce dénominateur commun, obtenue par sommation.

2. Conséquence

La notion de proximité ainsi introduite, est fondée sur une métrique dont on dote chaque échelle, c'est-à-dire que :

a) une unité de mesure est définie sur chaque échelle : on peut alors comparer deux écarts inter-échelons d'une même échelle (comme dans la méthode ELECTRE-I) et dire combien de fois un échelon est contenu dans l'autre (la position de chaque état est appréciée en nombres de cette unité).

b) un rapport est défini entre les diverses unités de chacune des métriques afin d'obtenir une unité de mesure qui soit la même sur chaque échelle : un échelon d'une échelle donnée est comparable à un échelon de même position d'une autre échelle.

L'unité de mesure employée au cours du premier chapitre était la "désutilité" induite par l'effectif global d'un sous-ensemble de lieux déterminé et par le temps de transport supporté par les élèves. Afin d'obtenir une unité qui soit la même pour ces deux critères, nous avons tenu pour équivalentes, la désutilité relative à un effectif nul, et la désutilité induite par le transport de 140 élèves sur une distance de 5 km, ce qui revenait à multiplier chaque valeur de l'indice de transport par le rapport $C = \frac{200}{1555,4}$ (v. Chapitre 1, p.30). Nous voyons dès lors poindre l'arbitraire d'une telle procédure.

-4. Conclusion :

Le chapitre premier se veut un très bon exemple de l'effort déployé en vue de définir une unité commune grâce à laquelle on a pu comparer les lieux selon deux (et seulement deux) critères différents. La représentation graphique de l'indice de désutilité totale résume très bien le caractère hasardeux de la méthode : pour agréger les indices partiels il nous a fallu supposer qu'une perte de x unités de l'une des échelles peut toujours être compensée par le gain de x unités de l'autre (les critères "effectifs" et "transport" ayant été jugés de même importance) et cela quelle que soit la place des x unités sur la première et des x unités sur la seconde.

Par contre, la méthode Electre n'accepte pas ce concept de distance. En refusant l'introduction d'une métrique unidimensionnelle elle évite de se faire enfermer dans un corps d'hypothèses extrêmement contraignantes. Si elle admet la comparabilité des écarts $\gamma_j(i)$ et $\gamma_j(i')$, $\forall$ i, i' $\in$ E afin d'en dégager une notion"grossière" de proximité, elle ne permet pas la sommation des notes associées aux échelons.

Dans la suite du présent mémoire, nous adopterons aussi ce concept de pseudo-métrique sans pour autant passer par le truchement des échelles verbales du type : (nul, très moyen, ..., parfait).

En effet, l'hypothèse selon laquelle il est possible d'établir une correspondance entre chaque lieux de E et chaque état de K_j, revient à se donner l'échelle a priori : avant enquête, on se donne une échelle, puis pendant l'enquête, on en déduit un préordre conformément à la relation γ_j : $E \longrightarrow K_j$. Dès lors la "proximité" d'un lieu par rapport à un autre, dépendra du nombre d'échelons de cette échelle fixée a priori :

si pour classer deux lieux nous avons le choix entre seulement trois échelons, la notion de proximité qui en résulte est beaucoup plus grossière que celle dérivant d'un classement sur une échelle dont le nombre d'échelons est plus élevé et qui s'avère donc plus fine quant aux diverses possibilités du classement. Dans cette optique, il nous semble que le véritable problème n'est pas tant celui de faire oorrespondre à un lieu l'échelon d'une échelle donnée, que d'établir cette dernière. Quel sera le nombre d'échelons ? Question importante à laquelle on ne peut donner malheureusement qu'une réponse trop vague : "le choix du nombre d'échelons de chaque échelle dépend essentiellement du problème à résoudre. Ce nombre est souvent faible, inférieur à quelques unités" (1).

En conséquence, nous préférons <u>définir directement un préordre sur E</u>. Ensuite il sera possible de lui associer une échelle en créant un échelon <u>(la note sera attribuée directement)</u> par classe d'équivalence du préordre. <u>Le système de notation sera élaboré dans l'optique de la méthode qui exige le plus une notion améliorée de proximité, les sommes pondérées</u>. On se réservera la possibilité de la modifier quelque peu pour utiliser ELECTRE-I.

<u>SOUS-SECTION 2</u> : Le système de notation

Il résulte d'une démarche empirique.

Suivant que les critères se prêtaient ou non, à la quantification, des questions se sont posées : présenter celles-ci et y répondre, tel est le but assigné à cette sous-section.

---

(1) ELECTRE, page 33, note de travail n° 49. Op. cit.

-1. Pour les critères dont l'expression est quantitative

A) Le contexte

1. Données du problème

a) $S_{C_j}(i)$ est le score associé au lieu i selon le critère C_j.

b) Pour un même critère C_j, les différentes valeurs prises par $S_{C_j}(i)$ définissent une échelle dont le sens favorable varie dans l'ordre croissant de la suite des scores : $S_{C_j}(i) > S_{C_j}(i')$ signifie que selon C_j, le lieu i est mieux classé que i'.

c) $S_{C_j}(i)$ est une fonction de la quantité $qC_j(i)$ révélée par C_j et associée à i. Exemple : considérons le critère C5 qui exprime la "taille de l'école existante". A chaque lieu i correspond une certaine quantité q_i de la propriété que l'on cherche à "mesurer". La propriété dont il s'agit est la taille de l'école au lieu i, nous en mesurons sa surface, notre pas étant l'unité de mesure : qC5(i) est le nombre de $(\text{pas})^2$ de la salle (ou des salles) de classe au lieu i. Nous conserverons cet exemple par la suite.

2. HYpothèses

a) $S_{C_j}(i)$ est une fonction croissante de la quantité $q_{C_j}(i)$. L'hypothèse contraire est également possible, nous serons amenés à l'envisager, mais comme cas particulier.

b) Chacun des critères possède un poids égal à l'unité. Cette hypothèse n'est pas restrictive car si tel n'était pas le cas, par exemple, un critère possèdant un poids supérieur à 1, on s'empresserait de la faire intervenir comme autant de critères élémentaires que l'indique son coefficient, la suite du raisonnement ne serait pas modifiée.

3. Problème

Comment déterminer les scores $S_{C_j}(i)$, éléments des scores finals $S(i) = \sum_{j=1}^{14} S_{C_j}(i)$, qui devront établir le classement final des lieux i de la façon la meilleure ?

La réponse à cette question a nécessité une démarche en trois étapes.

B) Les trois stades de la résolution

1. Hauteur de l'échelle

a) On pourrait imaginer que le score de l'école au lieu i puisse être représenté comme le pourcentage de l'observation moyenne constatée au niveau national : si $q_{C5}(i)$ représente la taille de l'école en i, et Q la taille moyenne des écoles primaires françaises, alors $S_{C5}(i)$ s'écrit :

$$S_{C5}(i) = \frac{q_i}{Q} \times 100 \qquad (1)$$

Pour ce critère, l'enquête menée auprès des lieux 1, 2, 3 et 6 avec Q = 100 (pas)², nous donne les observations et les résultats suivants :

i	3	2	1	6
$q_{C5}(i)$	196	81	72	O
$S_{C5}(i)$	196	81	72	O

b) Conséquence : la hauteur de l'échelle (différence entre le score supérieur et le score inférieur) relative à C5 est beaucoup trop ample et contribue de ce fait à avantager les lieux situés sur les échelons les plus hauts et à handicaper ceux qui se trouvent sur les échelons les plus bas. Par ailleurs, nous pouvons imaginer d'autres résultats, établis par la formule précédente, où le lieu 3 serait toujours dernier, mais sur des échelles dont le score supérieur ne dépasserait jamais 10. Puisque tous les critères ont le même poids, le bon sens exigerait que ce lieu occupe la dernière place du classement final. Grâce au critère C5 pour lequel 3 est premier avec un score très important, nous irions à l'encontre du bon sens.

Cette façon d'attribuer les scores consiste à donner trop d'importance à un critère selon la hauteur exagérée de son échelle, ce qui est contraire à l'hypothèse b.

2. Etendue de la notation le long de l'échelle

Pour éviter en partie cette distorsion, il convient d'attribuer les scores sur des échelles dont la hauteur soit à peu près la même pour chaque critère.

a) Dans cette intention, chaque série d'observations sera rangée de telle façon que le score le plus bas soit 0 et le score le plus haut 20. Selon C_j, le score du lieu i s'écrit :

$$S_{C_j}(i) = \frac{q_{C_j}(i) - \inf_{i \in E}\left[q_{C_j}(i)\right]}{\sup_{i \in E}\left[q_{C_j}(i)\right] - \inf_{i \in E}\left[q_{C_j}(i)\right]} \times 20 \qquad (2)$$

avec : $S_{C_j}(i) = 0$ si $q_{C_j}(i) = \inf_{i \in E}\left[q_{C_j}(i)\right]$

$S_{C_j}(i) = 20$ si $q_{C_j}(i) = \sup_{i \in E}\left[q_{C_j}(i)\right]$

Selon cette formule, nous obtenons les résultats suivants :

i	3	2	1	6
$q_{C_5}(i)$	196	81	72	O
$S_{C_5}(i)$	2O	O,41	O,38	O

<u>REMARQUE</u> : d'après la formule établie ci-dessus, $S_{C_5}(6)$ est une forme indéterminée $(\frac{0}{0})$. On lèvera l'indétermination en divisant chaque terme de la formule par $q_{C_5}(i)$ tel que $q_{C_5}(i) \neq \inf_{i \in E} \left[q_{C_5}(i) \right]$.

b) <u>Conséquence</u> : $S_{C_j}(i)$ est fonction des valeurs extrêmes de la distribution des $q_{C_j}(i)$: si l'observation la plus grande est très importante par rapport aux autres, la première sera assurée d'obtenir un score égal à 2O et les dernières des notes très proches de O. A fortiori lorsque la valeur minimale est très faible.

De ce fait, le lieu correspondant à $\sup_{i \in E} \left[q_{C_j}(i) \right]$ est avantagé, beaucoup moins que par la formule (1), mais l'inconvénient subsiste.

c) Avant d'aborder la troisième étape au cours de laquelle sera présentée la méthode retenue, il convient d'énoncer les conditions auxquelles celle-là devra satisfaire :

1 ère condition : <u>la hauteur maximale des échelles est la même quel que soit le critère envisagé</u>. Nous admettons par exemple, que la notation puisse s'effectuer dans l'intervalle (O, 2O).

2 ème condition : <u>les scores s'étendent le plus possible le long de l'échelle considérée</u>.

3 ème condition : <u>l'attribution des scores s'effectue selon une règle générale</u> :

- le système de notation doit bien évidemment être le même pour tous les critères,

- le score doit refléter l'ensemble des observations relatives au critère donné (et non pas dépendre des seules observations extrêmes).

3. Proposition d'une règle générale de notation

a) Expression du score du lieu i selon le critère C_j

$$S_{C_j}(i) = \frac{q_{C_j}(i) - (\bar{q} - 2\sigma)}{4\sigma} \times 20, \quad \text{si} \quad \bar{q} - 2\sigma < q_{C_j}(i) < \bar{q} + 2\sigma$$

$$S_{C_j}(i) = 0 \qquad \text{si} \qquad q_{C_j}(i) \leqslant \bar{q} - 2\sigma$$

$$S_{C_j}(i) = 20 \qquad \text{si} \qquad q_{C_j}(i) \geqslant \bar{q} + 2\sigma$$

$q_{C_j}(i)$ = observation relative au lieu i suivant le critère C_j,
$\bar{q}$ = moyenne arithmétique des $q_{C_j}(i)$,
σ = écart type de la distribution des $q_{C_j}(i)$.

b) Les conditions sont respectées

α) <u>hauteur</u> :

Pour tout critère, la notation demeure dans l'intervalle (0, 20).

β) <u>étendue</u> :

Pour tout critère, les scores se répartissent autour d'une valeur moyenne : les distorsions induites par les observations extrêmes sont amoindries.

γ) <u>généralité</u> :

Pour tout critère l'attribution des scores s'effectue d'après la formule ci-dessus, et les observations sont rangées par rapport à un moyen terme $\bar{q}$.

A titre de vérification, nous pouvons comparer les résultats obtenus pour C5 au cours de ces trois étapes.

En ce qui concerne la troisième nous avons :

$\bar{q} = 82,571 \text{ (pas)}^2$

$\sigma = 64,515$

d'où :

$$S_{C_5}(i) = \frac{q_{C_j}(i) + 46,459}{258,06} \times 20$$

i	$q_{C_5}(i)$	$S_{C_5}(i)$ 1ère formule	$S_{C_5}(i)$ 2è formule	$S_{C_5}(i)$ 3è formule
3	196	196	20	19
2	81	81	0,41	10
1	72	72	0,38	9
6	0	0	0	3,6

c) Conséquence de la condition de généralité

La variation des $S_{C_j}(i)$ s'effectue selon une forme <u>linéaire</u> et de ce fait, ne traduit pas rigoureusement la variation <u>d'utilité</u> escomptée à partir d'une modification des $q_{C_j}(i)$.

Ainsi l'écart estimant la proximité du lieu 1 par rapport au lieu 6, qui ne possède pas d'école, est plus faible que celui existant entre 3 et 2, ces deux lieux ayant chacun une école.

Une diminution du taux de croissance de la fonction S_{C_5} (i) à partir d'une certaine valeur de q_{C_5} (i) traduirait sans doute une fonction d'utilité plus juste.

Pour d'autres critères, au contraire, une notation des lieux selon une fonction exponentielle conviendrait mieux.

d) Lorsque le score est une fonction décroissante de la quantité, les calculs seront menés d'après la formule générale et on procèdera à l'inversion des résultats ainsi obtenus.

C) Résultats

1. Les moments d'inertie :

a) Inertie actuelle : C_1

Les moments d'inertie calculés au cours du premier chapître sont les quantités q_{C_1} (i) auxquelles correspondent les scores S_{C_1} (i). La correspondance est établie à partir de la formule :

$$S_{C_1}(i) = \frac{q_{C_1}(i) - 26,01}{170,82} \times 20$$

i	1	2	3	4	5	6	7
q_{C_1} (i)	117,549	117,451	52,311	57,416	171,697	101,598	161,939
S_{C_1} (i) *	8,9	8,9	17,1	15,9	3,1	10,7	3,7

* indique que les résultats ont été inversés.

b) Inertie future : C_2

Les moments d'inertie sont calculés sur la base des effectifs prévus pour 1980 et les scores sont donnés par l'expression

$$S_{C_2}(i) = \frac{q_{C_2}(i) - 28,30}{117,89} \times 20 .$$

i	1	2	3	4	5	6	7
$q_{C_2}(i)$	76,579	105,914	41,588	53,805	125,176	89,217	118,432
$S_{C_2}(i)$ *	13,2	8,2	16,4	15,3	2,3	10,3	4,3

REMARQUE : Les chiffres concernant la population des hameaux et des lieux dits nous furent communiqués pour les années 1951 et 1968 (INSEE) seulement. Les prévisions pour 1980 et pour l'ensemble des lieux, furent calculés par simple extrapolation des tendances, lesquelles furent confirmées par les maires de chaque commune : aucune correction ne fut apportée. Pour obtenir les effectifs scolaires de 1980, on appliqua à la population totale -1980 de chaque lieu le taux de scolarisation de celui-ci, observé sensiblement constant ces dernières années. En ce qui concerne un lieu donné i, le taux de scolarisation fut approximé par le rapport :

$$t_i = \frac{\text{population scolarisée du lieu i en 1971}}{\text{population totale du lieu i en 1971}}$$

si bien que les effectifs scolaires prévus pour 1980 (e_i) furent obtenus par la formule e_i = population totale du lieu i prévue pour 1980 x t_i. A partir des e_i on calcula les moments d'inertie q_i, consignés dans le tableau ci-dessus (1).

(1) Cette procédure est fort discutable, mais très rapide. C'est ce dernier caractère qui explique son emploi dans notre mémoire.

2. Prix des terrains : C_3

+ $q_{C_3}(i)$ = prix du terrain au lieu i, exprimé en francs par m^2.

REMARQUE : il s'agit du terrain qui serait éventuellement affecté à des fins éducatives : jeux, sport, construction ...

$$+\ S_{C_3}(i) = \frac{q_{C_3}(i) - 0{,}997}{4{,}12} \times 20$$

i	1	2	3	4	5	6	7
$q_{C_3}(i)$	2,5	2	2,5	4	3	4	4,5
$S_{C_3}(i)$	14,6	17	14,6	7,3	9,7	7,3	4,9

3. Dépenses municipales pour l'éducation : C_4

+ $q_{C_4}(i)$ = somme dépensée par la commune pour un élève fréquentant l'école du lieu i (la somme est la même pour la commune et son hameau). somme annuelle (1).

$$+\ S_{C_4}(i) = \frac{q_{C_4}(i) + 1{,}97}{9o{,}32} \times 20$$

i	1	2	3	4	5	6	7
$q_{C_4}(i)$	21,28	21,28	21,28	68,97	31,58	68,97	68,97
$s_{C_4}(i)$	5,2	5,2	5,2	15,7	7,4	15,7	15,7

(1) Ces dépenses nous furent communiquées directement par l'instituteur (secrétaire de mairie) ou par le maire.

4. Taille de l'école existante : C_5

+ $q_{C_5}(i)$ = surface de la salle de classe de l'école du lieu i, exprimée en $(\text{pas})^2$.

$q_i = 0$ lorsque i ne possède pas d'école.

$$+ S_{C_5}(i) = \frac{q_{C_5}(i) + 46{,}459}{258{,}06} \times 20$$

i	1	2	3	4	5	6	7
$q_{C_5}(i)$	72	81	196	O	99	O	130
$S_{C_5}(i)$	9	9,87	19	3,6	11	3,6	14

- On remarquera que lorsque $q_{C_j}(i) = 0$, le score correspondant ne traduit pas obligatoirement cette absence totale de propriété. Cf. $S_{C_5}(4)$ et $S_{C_5}(6)$.

5. Nombre de locaux pouvant être affectés à des fins éducatives : C_7

+ $q_{C_7}(i)$ = représente le nombre de locaux en bon état et à proximité de l'école du lieu i (ou de l'école possible) où l'on pourrait y installer un foyer, des salles de travaux pratiques etc ...

$$+ S_{C_7}(i) = \frac{q_{C_7}(i) + 0{,}885}{2{,}912} \times 20$$

i	1	2	3	4	5	5	7
q_i	O	O	2	O	1	O	1
$S_{C_7}(i)$	6,1	6,1	19,8	6,1	13	6,1	13

6. Espace libre à l'entour de l'école : C_9

+ $q_{C_9}(i)$ = espace réservé aux élèves ou à l'adjonction de constructions nouvelles. Evaluation en m^2.

+ $S_{C_9}(i) = \frac{q_{C_9}(i) + 1610,557}{5572,828} \times 20$

i	1	2	3	4	5	6	7
$q_{C_9}(i)$	150	6	750	2500	625	4000	200
$S_{C_9}(i)$	6,3	O,3	8,5	14,8	8	2O	6,5

7. Distance séparant le lieu d'Arnay-le-duc : C_{11}

+ Cette ville est un élément important de l'environnement pédagogique ; diversité des commerces, centre industriel de la région etc ... Elle se situe suffisamment près de tous les lieux de telle manière que l'on puisse penser à la faire visiter par les élèves.

La fréquence des déplacements pourrait dépendre de la distance $q_{C_{11}}(i)$ exprimée en kilomètres qui la sépare du lieu i,

$$+ S_{C_{11}}(i) = \frac{q_{11}(i) - 3,236}{10,528} \times 20$$

i	1	2	3	4	5	6	7
$q_{C_{11}}(i)$	11	11	12	8	7	5,5	5
$S_{C_{11}}(i)$	4,3	4,3	3,4	7,2	9,1	14,8	16,7

8. Présence de rivières et de forêts : C_{14}

$+ q_{C_{14}}(i)$ peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2 suivant l'absence, la présence d'une rivière ou d'une forêt, la présence d'une rivière et d'une forêt. Selon que l'élément est plus ou moins éloigné de l'école, on pourra choisir une note inférieure à celle justifiée normalement par sa présence.

$$+ S_{C_{14}}(i) = \frac{q_{C_{14}}(i) - 0,438}{1,98} \times 20$$

i	1	3	3	4	5	6	7
$q_{C14}(i)$	1	2	1	1	1	2	2
$S_{C14}(i)$	5,7	15,8	5,7	5,7	5,7	15,8	15,8

2. Pour les critères dont l'expression est qualitative :

Au lieu de se donner une échelle pour en déduire un préordre complet, nous commencerons par définir celui-ci pour obtenir l'échelle.

A) La simplicité du problème théorique

1. Soit $\geqslant$ une relation binaire définie sur l'ensemble des lieux E et pour un critère donné, $i \geqslant i'$ se lit : i est "préféré ou indifférent à " i' (selon un critère déterminé). On montre que cette relation (réflexive et transitive) est une relation de préordre. Nous supposerons d'autre part que selon chaque critère <u>on peut comparer tous les couples de lieux</u> : la relation est donc une relation de préordre complet puisque pour tout couple (i, i') de lieux appartenant à E on a, ou bien $i \geqslant i'$, ou bien $i' \leqslant i$.

2. De ce préordre complet, on peut déduire une relation d'équivalence = sur E définie par : <u>$i = i'$ si et seulement si $i \geqslant i'$ et $i' \leqslant i$</u> ($i = i'$ se lit : "i équivalent à i'"). En effet, une relation d'équivalence sur E est une relation de préordre à laquelle on ajoute la propriété de symétrie. Démontrons que = est bien une relation d'équivalence.

a) la relation est réflexive : $i = i \;\forall i \in E$.

En effet :

$$i \geqslant i \quad \text{et} \quad i \geqslant i \Rightarrow i = i \quad \forall i \in E$$

b) la relation est transitive :

$$i = i' \quad \text{et} \; i' = l \Rightarrow i = l$$

En effet : $i \geq i'$ et $i' \geq i \Rightarrow i \geq i$

et $i \geq i'$ et $i' \geq i \Rightarrow i \geq i$

c) la relation est symétrique :

$$i = i' \Leftrightarrow i' = i$$

En effet : $i \geq i'$ et $i' \geq i \Leftrightarrow i' \geq i$ et $i \geq i'$

3. Une échelle est associée au préordre en attribuant directement une note par classe d'équivalence, cette note devant reflèter la notion de proximité entre les lieux.

B) L'insuffisance de la relation unique

1. L'information "$i \geq i'$" ne montre pas un grand intérêt pour le problème pratique. Nous supposerons que l'enquêteur est capable de dissocier l'information précédente : ou bien i est préféré à i', ou bien les deux lieux sont équivalents.

2. Les deux instruments de l'enquête : les relations = et >

a) la relation = est une relation d'équivalence,

b) la relation > possède les propriétés suivantes

- transitivité : $i > i'$ et $i' > i \Rightarrow i > i$
- si $i = i'$ alors $i \not> i'$ (i n'est pas préferé à i')
- si $i \neq i'$ (i n'équivaut pas à i'), alors $i > i'$ ou $i' > i$.

REMARQUE : Ces deux dernières propriétés résultent de l'hypothèse faite sur la dissociation de l'information $i \geq i'$. On pourra les considérer comme hypothèses.

3. Sous ces conditions, nous pouvons dès lors attribuer des notes aux lieux :

- Si i = i', les deux lieux recoivent la même note.
- Si i >i', le lieu i reçoit une note supérieure à celle de i'.

<u>REMARQUE</u> : La notation s'effectue dans l'intervalle (O, 2O).

C) <u>Une difficulté d'ordre pratique : l' paopriétéde transitivité</u>

La relation d'équivalence = est symétrique et réflexive par définition : si i est jugé équivalent à i', la réciproque est vraie, i est évidemment jugé équivalent à lui-même. Les deux dernières propriétés de la relation sont vraies par hypothèses.

Mais l'enquête a révélé que la propriété de transitivité, en ce qui concerne les deux relations, n'est pas seulement une question de définition. Nous pensons qu'elle revêt la forme d'une supposition dont on peut éventuellement tester la véracité. En effet, l'expérience peut mener aux résultats suivants :

$i = i'$, $i' = l$, $l = l'$ et $i > l'$.

Des trois premiers résultats, on déduit par transitivité : i = l', résultat infirmé par l'observation. La propriété de transitivité de la relation = n'est donc pas infiniment "sensible" à l'expérience. Pour surmonter cette difficulté, l'expérience doit être renouvelée plusieurs fois, et on dira que i > l' si i est observé être "préferé à" l' plus souvent que ne l'est celui-ci par rapport à i et que i = l' si la moitié des observations vérifie i > l' et l'autre moitié confirme la relation l' > i, en pratique il serait plus aisé de remplacer la série des nouvelles observations par un jury composé de plusieurs enquêteurs.

D. <u>Résultats</u> :

1. Etat de conservation des locaux : C_6

a) Les observations sont les suivantes :
Clomot = Jouey ; Allerey > Jouey ; Jouey > Huilly ; Huilly > Promenois ; Promenois = Pochey ; Angôte > Pochey ; Huilly > Angôte.

b) Elles engendrent le classement ci-après :
Allerey > Jouey = Clomot > Huilly > Angôte > Pochey = Promenois.

c) La notation s'effectue suivant le sens montant des échelons :
- la hauteur maximale des échelles est la même quelque soit le critère retenu (20).
- les scores s'étendent le plus possible le long de l'échelle considérée (une absence totale de propriété n'entraîne pas obligatoirement un score nul).
- l'attribution des scores ne s'effectue plus selon une règle générale, ils reflètent pour chaque critère, une fontion d'utilité particulière.

Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

i	4	6	2	1	5	7	3
$S_{C_6}(i)$	0	0	5	10	15	15	16

2. Présence d'un local pouvant servir de cantine : C_8

Le score d'un lieu ne reflète pas seulement l'absence ou la présence du local. Lorsque celui-ci existe, il est tenu compte de son état et de la distance qui le sépare de l'école.

i	6	4	1	2	3	5	7
$S_{C_8}(i)$	O	O	O	O	5	16	16

3. Configuration de l'espace libre à l'entour de l'école : C_{10}

i	6	3	7	1	2	4	5
$S_{C_{10}}(i)$	5	10	10	10	10	12	15

4. Nuisances minimales : C_{12}

Les scores faibles s'expliquent surtout par la proximité d'une route nationale (dangereuse pour les élèves, bruit ...)

i	4	7	5	2	1	3	6
$S_{C_{12}}(i)$	2	3	12	12	12	19	20

5. Position de l'école par rapport au centre du village : C_{13}

Il serait souhaitable que l'entrée de l'école se pose comme un lieu de vie sociale. On devra traiter les abords de l'école de façon à faciliter les rencontres entre habitants. Comme les mères de famille font généralement leurs achats en revenant de l'école, il serait commode que celle-ci soit située à proximité des commerces, du bureau de poste ... autant d'éléments qui définissent le centre d'un village.

i	4	1	7	6	5	3	2
$S_{C_{13}}(i)$	9	10	10	19	19	19	19

Les résultats des deux paragraphes précédents sont rangés dans le tableau ci-contre (tableau 1). A titre d'information, nous avons calculé le score total associé à chaque lieu i :

$$S(i) = \sum_{j=1}^{14} p_{C_j} S_{C_j}(i)$$

$$p_{C_j} = 1, \forall_j$$

$$i = (1, \ldots, 7).$$

TABLEAU 1.

RECAPITULATION DES SCORES ASSOCIES A CHAQUE LIEU SELON CHAQUE CRITERE

$i \backslash C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	S(i)	Rangs	
1	8,9	13,2	14,6	5,2	9	10	6,1	0	6,3	10	4,3	12	10	5,7	115,3	6	HUILLY
2	8,9	8,2	17	5,2	10	5	6,1	0	0,3	10	4,3	12	19	15,8	121,8	5	ANGOTE
3	17,1	16,4	14,6	5,2	19	16	19,8	5	8,5	10	3,4	19	19	5,7	178,7	1	ALLEREY
4	15,9	15,3	7,3	15,7	3,6	0	6,1	0	14,8	12	7,2	2	9	5,7	114,6	7	POCHEY
5	3,1	2,3	9,7	7,4	11	15	13	16	8	15	9,1	12	19	5,7	146,3	4	CLOMOT
6	10,7	10,3	7,3	15,7	3,6	0	6,1	0	20	5	14,8	20	19	15,8	148,3	3	PROMENOIS
7	3,7	4,3	4,9	15,7	14	15	13	16	6,5	10	16,7	3	10	15,8	148,6	2	JOUEY

SECTION 3 : La pondération des critères

"Ceux-ci (les coefficients de pondération) paraissent relativement difficiles à définir. Le principal guide qui permet de les déterminer demeure leur définition : le coefficient d'un point de vue (critère) fournit une évaluation de l'importance, du poids, que prend ce point de vue dans la prise de décision de sélection" (1). Les auteurs de la méthode Electre-I écartent toute détermination scientifique des poids relatifs aux critères. Sur ce point, nous partageons leur sentiment et notre propos visera seulement la garantie apportée par des coefficients dont la détermination ne repose pas sur les jugements de valeurs d'une seule personne.

SOUS-SECTION 1 : Le principe

-1. L'optique choisie

A) L'appréciation de l'importance d'un critère ne constitue pas un fait scientifique.

1. Le fait n'a de signification scientifique que lorsqu'il est transposé de façon à pouvoir nous livrer des caractéristiques objectives mesurables. Par exemple, la température devient un fait scientifique lorsqu'elle n'est plus sentie sur la peau mais lue sur le thermomètre. Dans le premier cas, l'impression de température est subjective en même temps qu'imprécise, dans le second cas l'usage d'un thermomètre nous introduit déjà dans un monde scientifique.

(1) Electre - note de travail n° 49 - p. 31. Op. cit.

Apprécier une température, c'est mesurer la dilatation d'une colonne de mercure sur une échelle graduée. Ainsi la construction scientifique du fait suppose des instruments, c'est l'avis des philosophes pour qui un instrument est "une théorie matérialisée" (Bachelard).

2. Quel est l'instrument qui permettra de mesurer le poids d'un critère ? Nous nous interrogerons plus tard sur l'emploi de l'ordinateur. Si ce dernier se veut l'instrument adéquat, la mesure de l'importance d'un critère est-elle objective ? La réponse à cette question nous entrainerait trop loin. Disons simplement que l'importance d'un critère ne peut pas s'apprécier dans un rapport avec un autre objet (si ce n'est qu'avec un autre critère, ce qui repousse le problème mais ne le résoud pas), alors que par exemple, la propriété d'un solide de possèder un certain poids se ramène aisément à une relation avec un autre objet (le poids dépend du champ de gravitation). Dans le premier cas, un jugement de valeur est porté ; on reconnaît ce critère "important", dans le second on reconnait un rapport, une théorie est batie, un instrument de mesure est forgé.

B) L'enquête constituera un instrument grossier de la mesure de l'importance d'un critère

1. Supposons un instant que la température ne puisse plus être lue sur le thermomètre. Dès lors, comment apprécier la tempétature de cette salle ? On peut inviter plusieurs personnes à se prononcer sur la question suivante " La température de cette salle vous paraît-elle élevée ?" en lui attribuant une note comprise entre O et 10, suivant l'intensité de température ressentie.

Etant donné que cette intensité est subjective et relative, les notes attribuées seront différentes. La moyenne arithmétique qui dépend de la valeur de toutes les notes de la série sera considérée comme mesure de la température de la salle. Si cette mesure résume assez bien l'ensemble des avis représentés par des notes, elle en récapitulo aussi la subjectivité, la relativité et l'imprécision : autour de 20° C, l'être humain est sensible à une différence de un demi-degré, mais sa sensibilité est beaucoup moins différenciée pour des températures plus basses ou plus élevées.

2. Malgré tout, nous pensons que la note moyenne résumant un ensemble de notes subjectives, est moins subjective qu'une note individuelle. La détermination des poids relatifs aux critères suivra le même principe : chaque individu traduit l'importance qu'il attache à un critère par une note, la moyenne arithmétique de la série de notes est le poids du critère soumis à ce test.

- 2. La méthode suivie

La détermination des coefficients de pondération se décompose en deux étapes : la première est fidèle au principe énoncé précédemment, la seconde pourrait l'être, mais elle s'en écarte.

A) Détermination des poids correspondant à cinq groupes de critères :

1° Les cinq groupes de critères retenus

a) ils doivent réunir deux conditions :

- établir une partition sur l'ensemble des critères,

- correspondre à une question claire sur laquelle plusieurs personnes devront se prononcer.

b) la liste s'établit comme suit :

$G_1 = \{C_1, C_2\}$, "en général, le temps passé par les élèves dans un bus de ramassage vous parait-il un critère important ?"

$G_2 = \{C_3, C_4\}$ "dans la mesure où la commune participe financièrement à l'action éducative, par exemple en achetant certains appareils, livres ou en concèdant des prix avantageux à l'achat de terrains affectés aux élèves, quelle importance accordez-vous aux conséquences d'une telle participation quant à l'amélioration de la qualité de l'enseignement ?".

$G_3 = \{C_5, C_6, C_7, C_8\}$, "nous pensons qu'il n'est pas absolument nécessaire de créer une infrastructure nouvelle pour les causes du regroupement. Les élèves peuvent utiliser les batiments, les installations existantes de la commune d'accueil. Evidemment, cette utilisation dépend en grande partie de l'état de conservation des locaux et du nombre de ceux-ci, elle n'exclut pas la possibilité de constructions nouvelles. Que pensez-vous de notre idée ?".

$G_4 = \{C_9, C_{10}\}$ "un espace suffisant pour aménager, séparer les récréations, s'adonner à la pratique du jardinage ... constitue-t-il un critère important ?".

$G_5 = \{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}$, "comment juger de l'importance de l'environnement pédagogique ? Exemples : visites d'usines, de musées, présence de calme etc ...".

2° Les personnes invitées à se prononcer

a) Elles doivent réunir deux conditions :

- montrer un certain intérêt en ce qui concerne le regroupement d'écoles primaires rurales,

- attribuer à chaque question une note comprise entre 1 et 10, suivant l'importance qu'elles lui accordent.

b) la liste établie suivant la première condition est la suivante :

- un jury de psychologues,
- un jury de maires,
- un jury de parents d'élèves,
- un jury d'enseignants (instituteurs).

<u>REMARQUES</u> :

1. Chaque jury est composé de 12 individus.

2. L'enquête fut menée dans une région différente de celle choisie en vue du regroupement.

3° Le poids d'un groupe de critères sera la moyenne arithmétique d'une série de notes attribuées pour ce dernier

De quelle série de notes s'agit-il ? Quatre cas demeurent possibles :

- la distribution de notes d'un seul jury,
- la série correspondant à la combinaison de deux ou plusieurs jurys,
- les notes associées à un jury général fondant tous les individus dans un même ensemble,
- la distribution des notes résultant d'une combinaison des trois cas précédents.

La réponse à cette question dépend des résultats de l'enquête, elle sera discutée à la sous-section suivante.

Pour l'instant, nous supposons le problème résolu : soit $\Pi_{j'}$, le poids correspondant au groupe $G_{j'}$, $j' = (1 \text{ à } 5)$.

B) <u>Attribution de poids aux différents critères de chaque groupe</u>

1° Le coefficient affecté à chaque critère est fonction de l'importance tenue par ce dernier dans le groupe auquel il appartient.

Selon la place "fondamentale", "très importante", "importante" ou "souhaitable", occupée par un critère dans un groupe, le premier recevra respectivement la note 4, 3, 2 ou 1.

Soit p la note attribuée au critère C_j, $C_j \in G_{j'}$.

2° Cette détermination s'écarte du principe suivi au cours de la première étape.

Elle résulte en effet de notre propre initiative. Cependant, trois faits expliquent ou tendent à justifier cette irrévérence :

- la seconde étape est moins importante que la première. Celle-ci peut être considérée comme la clef de voûte du système de pondération, la deuxième étape n'en constitue que la clef de répartition.
- chaque critère doit être entendu pareillement et précisément par chaque individu, ce qui reste incertain dans le cas d'une enquête.
- l'addition d'un second questionnaire n'aurait certainement pas impliqué 100 % de réponses comme ce fut le cas pour le premier.

C) <u>Synthèse des deux étapes : l'attribution définitive des poids aux critères</u>

- Elle consiste à répartir proportionnellement aux notes attribuées lors de la seconde étape, le poids du groupe aux critères qui le composent.

- Appelons p_{C_j} le poids définitif associé au critère C_j. Son expression est la suivante :

$$\boxed{p_{C_j} = \frac{p \times \Pi_{j'}}{\sum_{p \in G_{j'}} p}}$$

$C_j \in G_{j'}$

p : note provisoire attribuée à C_j

$\sum_{p \in G_{j'}} p$: somme de toutes les notes provisoires associées aux critères du groupe $G_{j'}$

$\Pi_{j'}$: coefficient de pondération relatif à $G_{j'}$

$j = (1 \text{ à } 14)$ $\quad j' = (1 \text{ à } 5)$

SOUS-SECTION 2 : Les résultats

-1. La clef de voûte :

A) <u>Produit de l'enquête</u> :

Il est consigné dans le tableau suivant :

	PSYCHOLOGUES	MAIRES	PARENTS	ENSEIGNANTS
G_1	8,11 * (1,66)	7,44 * (1,83)	7,78 (1,03)	8,7 (1)
G_2	6,6 (1,96)	6,2 (0,98)	5,2 (3,12)	7,78 * 1,69
G_3	5,6 (3,38)	7,9 (2,02)	5,6 (3,75)	8,5 (1,43)
G_4	7,8 (2,64)	4,6 (2,11)	5,2 (2,05)	8,1 (1,22)
G_5	8,7 (1,35)	6,3 (1,1)	7,1 (1,8)	7,8 (1,54)

<u>REMARQUES</u> : - A l'intersection d'une ligne et d'une colonne sont rangés la moyenne des notes attribuées par le jury au critère donné et l'écart type de la distribution (ce dernier est placé entre parenthèses).

- Les calculs ne tiennent pas compte d'<u>une</u> note qui s'écarte "anormalement" de l'ensemble des autres. Ce fut le cas dans les cases repérées par un astérisque.

B) <u>Constatation première</u>

La perspective d'un jury général rassemblant tous les individus des quatre catégories au sein d'un ensemble homogène, devient caduque, sauf peut-être pour le groupe G_1.

En effet, les notes moyennes de chaque jury forment une distribution relativement étendue : la différence entre la note la plus haute et la note la plus basse pour un même groupe, hormis G_1, est toujours supérieure à 2 points. Cet écart paraît important étant donné que chaque jury attribua ses notes selon une échelle possédant une hauteur assez faible (9).

En ce qui concerne G_1, la distribution est beaucoup moins dispersée si bien que l'on peut considérer la moyenne arithmétique des notes moyennes sans que ces dernières soient considérablement modifiées.

Ainsi le dénominateur commun du jury général en ce qui concerne le temps de transport est l'importance que chaque juré lui accorde : toutes les notes se regroupent étroitement autour de la moyenne générale, 8, 01, expression du coefficient de pondération relatif à G_1

$$\Pi_1 = 8$$

REMARQUE : au cours de la sous-section 1, l'imprécision d'une telle détermination des coefficients fut mise en relief, en outre "des expériences numériques semblent montrer que les résultats d'ELECTRE restent stables lorsque les coefficients varient légèrement sans modifier leur ordre" (1), raisons pour lesquelles nous nous permettons d'arrondir les résultats.

Puisque le jury général ne peut être utilisé à la détermination des poids relatifs aux autres groupes, reste à déterminer un jury ultime qui nous indiquera la procédure à suivre.

---

(1) ELECTRE - note de travail n° 49. Op. cit. p. 31. même remarque en ce qui concerne les sommes pondérées, nous le verrons plus loin.

C) Le jury ultime : la matrice d'intercorrélations

L'idée consiste à observer l'évolution des notes moyennes attribuées pour chaque jury aux cinq groupes de critères afin de déceler les ressemblances ou/et les dissemblances existant parmi les différents jurys. Dans cette intention, nous avons calculé les coefficients de corrélation entre les séries de notes moyennes établies par les jurys pris deux à deux. L'interprétation demeure délicate.

1° La matrice d'intercorrélations :

	psychologues	maires	parents	enseignants
psychologues	-	-0,41	0,69	-0,20
maires	-0,41	-	0,37	0,46
parents	0,69	0,37	-	0,29
enseignants	-0,20	0,46	0,29	-

Avant de donner un sens aux résultats ci-dessus, il paraît bon de rappeler les deux faits suivants :

- le nombre d'observations ayant donné naissance aux coefficients de corrélation est très faible : la série de notes (moyennes) relative à un jury se compose de 5 observations (5 groupes de critères).

En conséquence, le coefficient calculé pour deux séries n'aura qu'une faible précision. Par contre, si l'ensemble des G_j, avait été beaucoup plus grand, un coefficient de corrélation même faible (0,3 ou 0,4) aurait dénoté une liaison entre 2 séries, lâche sans doute, mais certaine. Inversement lorsque les observations sont peu nombreuses, un coefficient élevé n'a qu'une significa-tion douteuse : il n'est pas impossible que, après avoir observé la notation des jurys sur des groupes de critères additionnels, sa vraie valeur soit nulle, c'est-à-dire que les deux jurys consi-dérés soient malgré les apparences, indépendants.

- les coefficients dont il s'agit sont des coefficients de corrélation linéaire. Ainsi un coefficient faible signifie qu'il n'y a pas de liaison linéaire entre deux jurys, mais ne veut pas dire qu'il n'existe pas de liaison du tout : cette dernière peut être hyperbolique, parabolique ou autre.

La première remarque apporte une restriction sévère à l'interprétation que nous ferons des résultats. La seconde est moins pertinente du fait que les observations sont peu nombreuses une vérification directe sur le tableau des moyennes (Cf. A) est aisée.

2° Interprétation :

a) les valeurs faibles des coefficients nous indiquent des liai-sons très lâches entre les différents jurys, cependant deux consi-dérations méritent une attention particulière :

- les jurys "psychologues-parents" d'une part, et "maires-enseignants" d'autre part, opèrent une dichotomie. Le premier groupe attribue, en moyenne, des notes qui vont dans le sens opposé à celles du second :

. Les groupes de critères qui paraissent importants aux psychologues le semblent aussi pour les parents : les deux jurys attribuent des notes qui ont tendance à aller dans le même sens, mais on constate que les parents sont beaucoup plus sévères que les psychologues dans leur système de notation.

. Même remarque en ce qui concerne le second groupe, les maires attribuant des notes beaucoup moins élevées que les enseignants ; toutefois l'évolution de la notation s'effectue dans le même sens.

. Mais dès lors qu'on observe l'évolution de la notation de deux jurys appartenant à deux groupes différents, la liaison est brisée et même, l'évolution de l'uno se fait dans le sens opposé à celle de l'autre. La partition faisant naître ces deux groupes de jurys se trouve ainsi justifiée.

- le jury "parents" permet d'atténuer la rigueur de cette simple dichotomie.

Cette tempérance reste timide puisque les coefficients de corrélation de la ligne parents indiquent des liaisons très lâches avec les autres jurys (sauf, bien sûr, pour les psychologues), cependant si le sens de la notation de ce jury ne confirme pas celui des autres, il ne l'infirme pas non plus.

b) Véracité des liaisons :

En plus des deux faits rappelés précédemment (cf. 1°), nous proposons les remarques suivantes :

α) la première considération semble inattendue quant à l'existence des liaisons intragroupes. L'expectative d'une dichotomie fondée sur un groupe "enseignants-psychologues" d'une part et "maires-parents" d'autre part, paraissait plus probable.

- "maires-parents" puisque dans les petites communes (et ce fut le cas pour notre enquête), l'intérêt général que le maire doit défendre peut être considéré comme la somme de tous les intérêts particuliers des habitants, et que parmi ces derniers, se trouvent les parents d'élèves. C'est une hypothèse. La seconde liaison serait plus certaine ;

- "enseignants-psychologues" puisque les premiers ont reçu des cours de psychologie et les seconds des cours de pédagogie. De toute façon, un instituteur doit se montrer "psychologue" et un psychologue de par sa formation, doit connaître les choses de l'éducation (cours de docimologie, d'économie de l'éducation ...).

Malgré tout, ne rejetons pas l'inattendu, au contraire, il mérite une justification :

- La liaison "maires-enseignants" fut très facile à vérifier dans les faits : quatre maires parmi les douze enquêtés sont des instituteurs ou d'anciens enseignants. D'autre part, il se peut très bien que les questionnaires aient été remplis par les secrétaires de mairie, or dans la très grande majorité des cas ceux-ci sont instituteurs en activité ou en retraite.

- Par contre, le lien "psychologues-parents" demeure encore inattendu. Les premiers attribuent les notes selon une certaine motivation alors qu' aucune règle n'oriente la notation des seconds (cf. écarts-types). Ayant raisonné sur des moyennes, la corrélation entre ces deux jurys semble provenir d'un artifice statistique. Malgré tout rien ne s'oppose à ce que les parents soient "psychologues" et que les psychologues aient des enfants.

(β) La seconde considération paraît normale, le commun dénominateur de tous les jurys est le fait qu'un certain nombre de personnes interrogées possèdent des enfants en âge d'aller à l'école. Ce nombre est sans doute petit, étant donné les faibles valeurs des coefficients de corrélation exprimant les liaisons "parents-autres jurys".

3° Décision :

A partir de quel jury ou de quel groupe de jurys allons-nous déterminer les coefficients de pondération des critères ? L'interprétation des résultats de la matrice d'intercorrélations nous amène à envisager deux possibilités :

a) L'optique du jury général :

Il ne s'agit pas du jury général rassemblant tous les individus au sein d'un ensemble homogène, optique que nous avons écartée, mais de deux jurys généraux : le premier renfermant tous les individus du groupe "psychologues-parents", le deuxième comprenant les jurés du groupe "maires-enseignants"

Bien évidemment, cette optique opère une dichotomie non seulement au niveau des jurys, mais aussi au niveau de l'analyse (choix de la commune d'accueil) : une première analyse sera menée sur la base de la pondération du premier jury général "psychologues-parents", la même procédure se répètera avec les coefficients de pondération déterminés par l'autre jury général "maires-enseignants". Si, par hasard, il s'avère que la même commune d'accueil est choisie, l'optique du jury général se pose comme garantie de la stabilité de la solution. Mais dans le cas contraire, il nous faudrait encore inventer un jury pour départager les deux solutions.

Mis à part le fait d'une double analyse, nous écarterons cette optique qui rend compte du même défaut relevé à propos de la perspective d'un jury général (cf. B) : au sein d'un même groupe (servant de jury général pour une analyse particulière) et en ce qui concerne un même groupe de critères, les notes moyennes montrent assez de dissemblance pour que l'on ne puisse penser à en calculer la moyenne arithmétique.

b) L'optique du jury unique :

Celui-ci doit réaliser un compromis entre les jurys.

C'est donc aux parents que revient l'arbitrage final. La notation de ce jury servira de base à la pondération des critères. Pour l'instant nous connaissons les poids respectifs de G_1, G_2, G_3, G_4 et G_5 :

$\Pi_1 = 8$ jury général (ou jury des parents)

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_2 = 5\\ \Pi_3 = 6\\ \Pi_4 = 5\\ \Pi_5 = 7\end{array}\right\}\ \text{jury des parents}$$

Reste à répartir ces poids entre les différents critères d'un groupe G_j.

-2. La clef de répartition

Comme prévu, elle résulte de notre propre initiative.

$\pi_{j'}$	$G_{j'}$	C_j	P	P_{C_j}
8	G_1	C_1	4	4
		C_2	4	4
5	G_2	C_3	2	2
		C_4	3	3
6	G_3	C_5	4	2
		C_6	3	1,5
		C_7	2	1
		C_8	3	1,5
5	G_4	C_9	4	4
		C_{10}	1	1
7	G_5	C_{11}	3	2,5
		C_{12}	4	3
		C_{13}	1	0,75
		C_{14}	1	0,75

REMARQUES : 1. Dans l'analyse à venir, l'inertie future C_2 devrait normalement posséder une plus grande importance que l'inertie présente C_1, cependant la forte incertitude attachée aux calculs de la première (quant aux prévisions démographiques) nous conduit à ramener son poids au niveau de la seconde.

2. En sus de l'importance relative tenue par un critère dans son groupe, l'attribution des "p" tient compte de la conséquence du critère quant à la décision finale.

Par exemple, la position de l'école par rapport au centre du village (C_{13}) occupe une place "très importante" dans le groupe G_5, cependant nous lui voulons seulement une place "importante" : l'observation sur le terrain révèle une notion très imprécise de ce que peut être le centre d'un village, et bien souvent l'exiguïté du lieu lui retire toute signification.

En conséquence, le classement obtenu selon ce critère est lui-même imprécis, et on veillera à ne pas accroître les distorsions en lui attribuant un poids trop élevé.

De même, la configuration de l'espace libre à l'entour de l'école (C_{10}) est au moins aussi importante que son étendue (C_9) mais son poids attribué est quatre fois plus faible : en général, quelques travaux suffiraient pour rendre praticables les terrains visités. Pour l'instant, un buisson de plus ou de moins, une pente plus ou moins inclinée ne doivent pas se montrer d'une conséquence extrême quant à la décision finale.

3. Afin de travailler sur des nombres entiers, nous convenons de multiplier par 4 les coefficients obtenus précédemment.

c_j	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
p_{c_j}	16	16	8	12	8	6	4	6	16	4	10	12	3	3

Le lieu qui sera choisi pour assurer l'accueil des élèves est celui qui parmi les sept, se rapproche le plus du "centre" de l'espace cadre d'analyse (cf. Chapître 1, C_1, C_2), en outre il sera lui-même doté d'une quantité d'espace importante (C_9) où l'école s'étendra à l'endroit le plus agréable (C_{12}), sans pour autant s'éloigner beaucoup d'Arnay-le-duc (C_{11}). Enfin, la municipalité devra dans une certaine mesure et sous certaines formes, favoriser la réalisation du projet et lui assurer une certaine pérennité. Telles sont les principales caractéristiques attendues de la future commune d'accueil.

Le tableau 2 ci-contre, procède du tableau 1, où chaque $S_{C_j}(i)$ est multiplié par p_{c_j}, $\forall\, i, \forall\, j$.

TABLEAU 2.

MATRICE DES VALEURS PONDERREES

C_j / i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	S(i)	Rangs	
1	142,4	211,2	116,8	62,4	72	60	24,4	0	100,8	40	43	144	30	17,1	1064,1	6	HUILLY
2	142,4	131,2	136	62,4	80	30	24,4	0	4,8	40	43	144	57	47,4	942,6	7	ANGOTE
3	273,6	262,4	116,8	62,4	152	96	79,2	30	36	40	34	228	57	17,1	1584,5	1	ALLEREY
4	254,4	244,8	58,4	188,4	28,8	0	24,4	0	236,8	48	72	24	27	17,1	1224,1	3	POCHEY
5	49,6	36,8	77,6	88,8	88	90	52	96	128	60	91	144	57	17,1	1075,8	5	CLOMOT
6	171,2	164,8	58,4	188,4	28,8	0	24,4	0	320	20	148	240	57	47,4	1460,4	2	PROMENOIS
7	59,2	68,8	39,2	188,4	112	90	52	96	104	40	167	36	30	47,4	1130,0	4	JOUEY

CONCLUSION DU CHAPITRE 2.

Le problème général a été sectionné en une suite de problèmes partiels, il convient maintenant d'établir un lien entre les résolutions successives de ceux-ci. Ce sera pour nous l'occas de préciser le sens de certains termes employés.

Le critère C_j conduit à un ensemble de résultats K_j. Cet ensemble est doté d'une structure qui, dans le cadre de notre exemple, est assez riche en informations et permet d'établir une application de E dans l'ensemble des nombres entiers positifs (structure cardinale : cf. Tableau 1). De cette application de E dans N^+ découlent de nombreuses relations entre les éléments de E. Ainsi se trouve justifiée la dénomination de "tronc commun" pour le tableau 1, car si nous disposons d'un tableau pourvu d'une quantité importante d'information pour la conduite de certaines méthodes d'analyse multicritère, ce même tableau peut évidemment servir à d'autres méthodes nécessitant une quantité moindre. En associant à chaque critère C_j un poids p_{C_j}, les résultats de la section 3 enrichissent encore l'information : le tableau 2 est un ensemble de structures pondérées sur E, et les méthodes d'analyse multicritère se proposent de lui faire correspondre une structure unique sur E.

En effet, l'ensemble des p_{C_j} forme un vecteur P à 14 dimensions et le couple (tableau 1, P) forme un 14-uple de critères pondérés : "une méthode d'analyse multicritère est ainsi une application qui à un m-t ple (m = 14) de structures pondérées sur E, fait correspondre une structure unique sur E" (1).

(1) Cf note page 111.

Ainsi la somme pondérée du lieu i est l'application qui fait correspondre au vecteur (S_{C_1} (i), S_{C_2} (i) ... $S_{C_{14}}$ (i)) son image $S(i) = \sum_{j=1}^{14} p_{C_j} S_{C_j}(i)$, (I). L'ensemble des résultats obtenus en faisant varier i de 1 à 7 est un ensemble de valeurs numériques : deux choix (portant sur les lieux) quelconques sont comparables et la solution optimale (commune d'accueil) nous est donnée par le choix du lieu i associé à $\max_{i \in E} S(i)$.

Pour fixer la terminologie nous appelerons fonction de décision le moyen qui nous permettra d'opérer le choix optimal de la commune d'accueil. Dans l'exemple précédent, ce moyen est concrétisé par la formule générale (I), au cours du premier chapitre la fonction de décision est représentée par l'expression :

$$T^{i'}_{1} = \frac{200}{1555,4} \sum_{i \in E^{i'}-(1)} t_{i,1}\ n_{i},\ \text{(II)}$$

et la solution optimale par le choix du lieu 1 associé au résultat $\min_{1 \in E^{i'}} (T^{i'}_{1})$.

Nous avons insisté sur le fait que ces deux fonctions ramenaient le problème dans un univers à une seule dimension,

- le critère effectif et temps de transport sont ramenés à un seul critère par l'intermédiaire de la fonction II donnant l'expression du moment d'inertie qu'il convient de minimiser. Nous avons une solution optimale par rapport à un critère unique,

- les quatorze critères sont fondus en un seul par la fonction I. La solution optimale existe, il s'agit d'optimiser la fonction de décision unicritère.

---

(1) G. BERNARD et M.L. BESSON : " Douze méthodes d'analyse multicritère" page 20. Revue Française d'Informatique et de Recherche opérationnelle n° V-3, 1971.

Pour déterminer une solution optimale, il faut une fonction de décision à optimiser. Cette fonction est nécéssairement uni-critère. En refusant d'agréger les critères en un seul, ELECTRE-I écarte l'emploi d'une fonction de décision et par là-même, la possibilité d'atteindre une solution optimale. Si l'on connaissait les relations fonctionnelles entre les quatorze critères on en déduirait une fonction de décision et on serait ramené aux cas précédents. En conservant l'intégrité de chaque critère, ELECTRE-I ne définit pas un choix optimal car " ce serait un pur hasard si les multi-critères étaient simultanément optimaux " (1). ELECTRE-I permet seulement de définir "une solution meilleure que les autres solutions envisageables" (1). Si la méthode refuse le concept de fonction de décision, par contre, elle admet celui de fonction d'utilité.

Nous définirons très simplement la fonction d'utilité en l'associant à la "fonction implicite" dont le contenu a été fixé au cours de la première section (cf. page59). Remarquons bien que ce contenu n'est pas spécifié en termes mathématiques et qu'il ne se résume pas en un seul mot : la fonction implicite (la fonction d'utilité) nous indique seulement les principes majeurs (l'utilité) qui devront (devra) influencer le choix de la commune d'accueil. Nous percevons alors la relation entre le fonction d'utilité et la fonction de décision. La première est un guide qui nous permet l'élaboration de la majeure partie de l'information : ordonnancement des éléments de l'ensemble des états possibles de chaque échelle et dans une certaine mesure, l'attribution des notes et la détermination des coefficients de pondération (étant donné qu'il y a confusion entre la personne du décideur et celle du chargé de l'étude, la préparation de l'analyse procède de la même notion d'utilité).

(1) J.L. GUIGOU :"Des progrès dans la recherche de la localisation optimale" page 31 CETEM 1970.

Une fois l'information rassemblée elle est intégrée dans une fonction de décision. La fonction d'utilité est donc commune à toutes les méthodes d'analyse multicritère, et nous dirons qu'une solution optimale obtenue à partir d'une fonction de décision quelconque, optimise la fonction d'utilité. Si nous admettons qu'un individu rationnel maximise son utilité, nous admettons alors qu'il refuse l'emploi d'une méthode qui comme ELECTRE-I, n'aboutit pas à une solution optimale. Comme il existe plusieurs façons d'atteindre l'optimum, l'individu rationnel choisira la méthode jugée "la meilleure" parmi celles qu'il connait. Mais il nous semble que cettte affirmation est par trop décisive et que l'individu qui se veut rationnel devrait commencer par s'interroger sur la notion de "solution optimale".

En effet, nous avons remarqué que le fait de tout chiffrer ou pire, de ne prendre en compte que les critères dont l'expression est quantifiable, en vue d'aboutir aux fonctions de décision I ou II, doit s'entourer d'hypothèses strictes, trop contraignantes pour qu'elles soient toutes respectées. Dans cette optique la signification des fonctions de décision apparaît très douteuse et les solutions optimales qui en résultent deviennent incertaines "la décision optimale que telle ou telle technique permettra alors de dégager ne sera en fait la meilleure que dans le cadre du modèle ainsi défini" (1). En revanche, les hypothèses deviennent moins restrictives dès lors qu'on refuse le concept de fonction de décision unicritère, mais là aussi la solution à laquelle on aboutit n'est pas optimale. Finalement, il n'y a aucune raison d'éliminer une ou plusieurs méthodes a priori sous prétexte qu'elle (s) ne conduit (sent) pas à l'optimisation de la fonction d'utilité.

(1) J. ANTOINE et B. ROY page 269 : "les techniques préparatoires de la décision, intérêt et limites". Op. cit.

A propos de celle-ci une dernière remarque s'impose :

Pour certains, l'emploi d'une fonction d'utilité est jugé inadmissible (cf. (1)) car il faut aider le décideur à la découvrir et ce processus s'avère très compliqué : il faut faire précéder le choix réel de l'examen d'autres choix déjà effectués par le décideur. D'autre part "la notion d'utilité dérive de la microéconomie classique pour laquelle tous les biens et services sont échangeables sur des marchés supposés parfaits dont l'équilibre se traduit par des prix"(1). Or comme toutes les notions de microéconomie, celle d'utilité est "marginaliste", en conséquence, il s'avère impossible de comparer les utilités de deux alternatives dont les profils sont nettement différents. Sous cette forme, l'utilité apparaît comme une notion mathématique servant à fonder directement la décision. Dans notre optique, les relations fonctionnelles entre les critères sont exprimées par des fonctions de décision unicritères très connues (sommes pondérées). Une fonction d'utilité très générale nous a permis d'élaborer l'information nécessaire aussi bien pour ces fonctions unicritères, que pour les méthodes considérant le problème dans son aspect multidimensionnel.

---

(1) P. BERTIER et J. de MONTGOLFIER :"Comment choisir en tenant compte de points de vue non commensurables". Analyse et Prévision -1971-

Deuxième Partie

L' ANALYSE

CHAPITRE INTRODUCTIF

Dans l'introduction générale, le problème de la sélection de la commune d'accueil fut abordé ; il a été affiné au cours de la première partie, nous le poserons d'une façon plus précise dans la section 1 de ce présent chapître.

Les méthodes d'analyse multicritère utilisées à sa résolution, feront l'objet d'une brève présentation au cours de la section 2.

Certaines méthodes ont recours à la théorie des graphes, la section 3 proposera quelques éléments généraux nécessaires à leur compréhension et nous donnera l'occasion de spécifier certains termes employés jusqu'alors.

SECTION 1 : Le problème

1° Etant donnés :

- les hypothèses relatives à la structure des échelles K_j,
- les valeurs des coefficients p_C,
- la représentation des sept profils en fonction des quatorze critères.

2° Il convient :

- soit de ranger les profils dans une liste (préordre ou ordre complets), le lieu associé à celui vanant en tête de liste devient commune d'accueil,

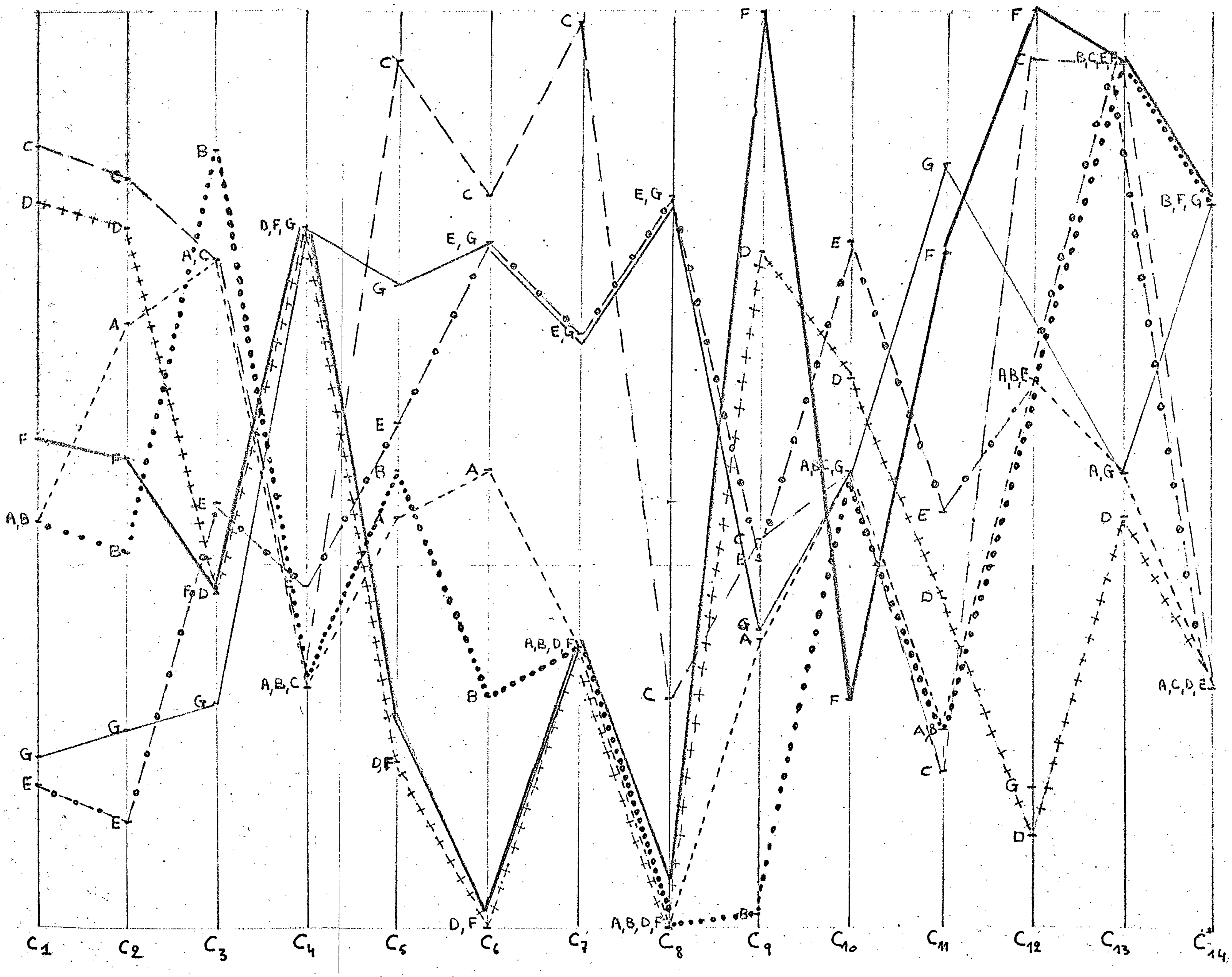
- soit d'éliminer la majeure partie d'entre eux afin d'en sélectionner un ou quelques-uns. La commune d'accueil sera choisie parmi les lieux associés aux profils sélectionnés.

La représentation graphique ci-après rend compte d'une <u>réalité complexe</u> qui le serait davantage si nous avions pu remplacer sur le papier chaque critère par autant de critères élémentaires que l'indique leur coefficient de pondération.

S'il en avait été autrement, le bon sens aurait très certainement surmonté le problème d'un classement ou d'une simple sélection à partir de quelques profils "disciplinés" entretenant des rapports spécifiques en fonction d'un nombre assez faible de critères. Cette représentation confuse justifie en quelque sorte l'emploi des méthodes que nous présentons ci-dessous.

Avant d'aborder la section 2, il convient de remarquer le changement de notation relatif à l'ensemble E des lieux : l'ordre alphabétique a été substitué à l'ordre numérique pour éviter toute confusion qui pourrait survenir entre les lieux d'une part et les scores, rangs ... d'autre part. $E = (i/i = A \text{ à } G)$; $A = 1$ $B = 2$ etc...

PROFILS DES LIEUX EN FONCTION DES MULTICRITERES



SECTION 2 : Les méthodes

Nous en résumerons les principaux traits en suivant l'ordre selon lequel les six méthodes seront exposées :

1. Les sommes pondérées des valeurs et des rangs (chapitre 1) :

Ce sont des méthodes très connues, unidimensionnelles aboutissant à un préordre complet sur l'ensemble E des lieux. La première nécessite des données cardinales (scores), la seconde des données ordinales (toutefois nous l'appliquerons ici à des données rassemblées en préordres).

2. La "Démocratie" (chapitre 2 :

C'est aussi une méthode connue dans son principe, mais peut-être moins dans l'utilisation que nous en ferons. Ce n'est pas une méthode unidimensionnelle puisqu'elle ne ramène pas les différents critères en un seul. Le rôle tenu dans la résolution par une partie des critères seulement, ne donne pas non plus un caractère multidimensionnel à la méthode. Elle nécessite des données ordinales, mais comme pour les sommes pondérées des rangs nous l'appliquerons à des données préordinales. Les résultats seront communiqués selon deux optiques : la sélection ("noyau") et le classement (ordre total).

3. ELECTRE-I (Chapître 3) :

Dans son application, elle diffère peu de la précédente.

La seule originalité consiste à introduire des équivalents numériques qui permettront le calcul d'un tableau supplémentaire et qui rendront la méthode multidimensionnelle. Les deux optiques demeurent, mais à l'ordre total sera substitué un classement par niveaux d'intérêt.

4. La méthode d'"Estimation d'une position relative" :

Nous verrons comment il est possible d'obtenir un préordre sur E à partir du tableau de concordance dressé au chapître précédent. Cette méthode ne considère pas un problème multidimensionnel, elle ne résoud pas non plus un problème unidimensionnel. Cependant, le compromis réalisé par l'"estimation d'une position relative" n'est pas de même nature que celui de la "démocratie".

5. L'analyse factorielle des correspondances :

C'est une méthode statistique qui a pour objet la présentation des données sous une forme intelligible. Les données dont il s'agit constituent le produit de l'enquête, mais elles sont ordonnées en fonction de la décision finale. Elles peuvent porter aussi bien sur des variables quantitatives que sur des variables qualitatives quantifiables ou non. Nous verrons sous quelles conditions il est possible de l'utiliser comme les autres méthodes d'analyse multicritère.

SECTION 3 : Quelques définitions (1)

A) Graphe

1. Soient i, i' appartenant à E et R une relation dans l'ensemble E. Alors l'ensemble des couples (i, i') tels que $i' \in R_i$, constitue une partie du produit E x E. Cette partie forme ce qu'on appelle le graphe G de la relation R.

2. Un arc est un couple d'éléments de E et appartenant à G.

3. Un élément de E dans G est appelé sommet.

4. Pour désigner le graphe G, on utilise souvent les notations suivantes (notations de Berge) :

a) $G = (E, R')$

Le graphe G est le couple formé de l'ensemble E des sommets et de la relation R' (application multivoque) qui définit la correspondance des différents éléments.

b) $G = (E, U)$

Le graphe G est le couple formé par les ensembles E et U, ce dernier désignant l'ensemble des arcs.

(1) d'après : . M. BARBUT : "Mathématiques des Sciences Humaines" t.1 p. 130 et suivantes
. A. KAUFMANN :"Des points et des flèches... La théorie des graphes" p.1 à 25
. Notes de cours du Professeur C. PONSARD : "Mathématiques appliquées à l'économie" 1971-72

B) <u>Construction d'un graphe à partir d'un exemple</u>

1. Soient A, B, C et D des éléments de l'ensemble E. La relation R établit le classement suivant :

A

B

C

D

2. Nous pouvons associer à cette liste le graphe G = (E, U) dans lequel l'ensemble des arcs U est défini par les conditions :

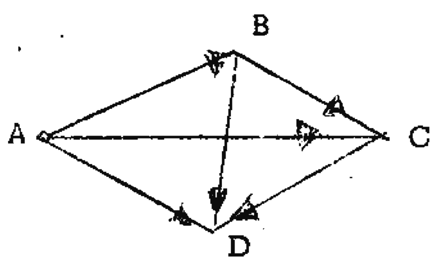
a) $(i, i') \in U$ si et seulement si i "précède" dans la liste ci-dessus i'. La représentation graphique est la suivante :

$i \longrightarrow i'$

b) $(i, i') \in U$ et $(i', i) \in U$ si et seulement si i "se trouve au même niveau que" i' $i' \rightleftarrows i'$.

c) $(i, i') \notin U$ et $(i', i) \notin U$ si et seulement si i et i' ne sont pas comparables (mais le fait que deux éléments se trouvent dans la liste signifie qu'ils sont comparables). Aucun arc ne relie les deux sommets : i. . i'

3. G = (E, U) donne la représentation suivante :



C) <u>Propriétés</u>

1. G = (E, U) possède les propriétés suivantes :

a) transitivité :

$$(i, i') \in U \text{ et } (i, i'') \in U \Rightarrow (i, i'') \in U$$

b) antisymétrie :

$(i, i') \in U$ et $(i', i) \in U \Rightarrow i = i'$, les sommets sont confondus.

2. La relation R étant transitive et antisymétrique, définit un <u>ordre strict</u> sur E (le graphe est un ordre strict).

En outre, tous les éléments de E sont comparables, nous avons un ordre strict <u>total</u> (dans le graphe, cela singifie que pour chaque couple de sommets, il y a au moins un arc reliant ces sommets).

<u>REMARQUE</u> : à la place de "total" on rencontre souvent l'adjectif "complet".

3. Dans le cadre de cet exemple, le verbe précéder est pris dans son sens courant. Mais si nous convenons que chaque lieu est dans la relation R avec lui-même, autrement dit nous admettons maintenant que R est réflexive, nous munissons chaque sommet du graphe d'une <u>boucle</u> i ("précéder" prend une signification plus large :" être <u>au moins</u> aussi élevé dans la liste que").

Dès lors, le graphe transitif antisymétrique est en outre reflexif : c'est un <u>ordre</u> (on dit aussi ordre au sens <u>large</u>).

Puisque tous ses éléments . sont comparables, c'est un ordre total (au sens large).

4. Si nous ôtons la propriété d'antisymétrie à la relation précédente, nous obtenons un préordre total. Ainsi, la liste $\overset{A}{\underset{D}{B}},C$ nous donne un préordre ; dans le graphe les arcs (B, C) et (C, B) existent, sans que pour autant B = C.

5. Enfin, si la relation n'est pas totale, on dira qu'elle est partielle : deux sommets au moins ne peuvent être comparés dans le graphe il n'y a pas de flèche entre ces deux sommets (cf. B-2-c) (1)

REMARQUE : D'après 4., un préordre est un ordre dans lequel il peut y avoir des ex-aequo.

D. Règle

Nous avons vu que d'une "liste" donnée - ordre ou préordre complets - on déduit un graphe lui-même complet. Au chapitre 2 nous aurons l'occasion d'adopter la démarche inverse : à partir d'un graphe complet, comment obtenir le préordre ou l'ordre qui lui est associé ? Dans la mesure où un arc orienté de i vers i' signifie en toute généralité que i "précède" i', nous conviendrons de la règle suivante :

1) Compter le nombre de fois n(i') où i' est précédé. i et i' appartenant à E.
2) Ranger les lieux suivant les valeurs de n croissantes.

(1) On dira que le graphe est non total ou non complet l'adjectif "partiel" relatif à un graphe possède une autre signification que nous verrons plus loin.

<u>EXEMPLE</u> : A partir du graphe représenté au B). 3., on retrouve de cette façon la "liste" initiale :

rangs	lieux	nombre de fois où le lieu est précédé
1	A	O
2	B	1
3	C	2
4	D	3

Dans cette section, l'exposé a été réduit aux éléments utiles à la compréhension de certaines méthodes. <u>D'autres définitions seront communiquées</u> au moment opportun.

CHAPITRE 1 : LA METHODE DES SOMMES PONDEREES

Nous établirons une distinction entre la somme pondérée des valeurs (scores) et la somme pondérée des rangs, mais dans les deux cas, les fonctions de décision unicritère ramènent le problème multicritère à un problème unidimensionnel, et les lieux sont rangés en un préordre total sur E.

SECTION 1 : Sommes pondérées des valeurs

- Les différents résultats de la première partie relèvent de cette méthode. Nous les rappelons ici :

Rangs	Moments d'inertie (1 ère partie, ch. 1)	$\sum_j p_{C_j} s_{C_j}(i)$ $p_{C_j} = 1 \; \forall j$ (tableau 1)	$\sum_j p_{C_j} s_{C_j}(i)$ p_{C_j} = valeurs déterminées, 1 ère partie ch. 2 - Sec.3 (Tabl. 2)
1	ALLEREY	ALLEREY	ALLEREY
2	POCHEY	JOUEY	PROMENOIS
3	PROMENOIS	PROMENOIS	POCHEY
4	ANGOTE	CLOMOT	JOUEY
5	HUILLY	ANGOTE	CLOMOT
6	JOUEY	HUILLY	HUILLY
7	CLOMOT	POCHEY	ANGOTE

- Une première constatation s'impose : quels que soient la fonction de décision retenue et le poids des critères, Allerey se maintient toujours en première position.

SECTION 2 : Sommes pondérées des rangs

A) Exposé de la méthode

- Soit $r_{c_j}(i)$ le rang du lieu i selon le critère C_j. Pour chaque lieu on calcule le coefficient suivant :

$$S'(i) = \sum_{j=1}^{14} p_{c_j} \cdot r_{c_j}(i)$$

Un préordre total sur E, est obtenu en rangeant les lieux suivant les valeurs de S croissantes ; $\forall i \in E, \forall i' \in E$ on a :

$$i \geqslant i' \Longleftrightarrow S'(i) \leqslant S'(i)$$

- Dans la mesure où il n'y a pas besoin d'affecter un score à chaque lieu (mais la notion de proximité est exclue), les sommes pondérées des rangs constituent une méthode très simple pour faire correspondre à l'ensemble des préordres pondérés sur E, un préordre total sur E. Mais elle est surtout employée lorsque chaque critère donne naissance à un ordre total sur E, car dans ce cas, la définition d'un rang est intuitive. Il convient donc de généraliser cette définition dans le cas d'un préordre quelconque.

B) Définition du rang (1)

On s'intéresse à un critère quelconque C_j donnant naissance à un préordre sur E.

(1) Nous reprenons "en gros" la définition de G. Bernard et M.L. Besson page 33. RIRO. Op. Cit.

Soit I' l'ensemble des éléments i' de E <u>strictement</u> meilleurs que i :
$I' = \{ i' / i' > i \}$

Soit r une application de E dans l'ensemble des entiers positifs (N^+) que nous définissons comme suit :

1) $r(i) = 1$, si $I' = \emptyset$

autrement dit : le lieu i occupe le premier rang ($r(i) = 1$) si aucun des éléments du préordre considéré, n'est strictement meilleur que lui.

Sinon :

$$2)\ r(i) = \sup_{i' \in I'} r(i') + \left| r^{-1} \left[\sup_{i' \in I'} r(i') \right] \right| \quad , \text{ si } I' \neq \emptyset$$

c'est-à-dire : $I' \neq \emptyset$ signifie qu'il existe des éléments strictement meilleurs (mieux classés) que i, dans ce cas le rang du lieu i sera égal à la somme du plus grand des rangs des éléments i' strictement meilleurs que i, et du nombre d'éléments ayant le rang le plus grand de ceux déjà attribués.

r (i) ainsi défini constitue le rang du lieu i pour le préordre donné.

Remarques : 1) d'après les hypothèses faites à propos des "échelles" (cf 1ère partie), "strictement meilleur" signifie "situé sur un échelon plus haut" ou "affecté d'un score supérieur". D'autre part le rang le plus grand numériquement correspond au rang appelé "le plus bas" c'est à-dire représentant l'échelon le plus bas. Au contraire, le rang le plus faible numériquement correspondra au rang représentant l'échelon le "plus haut".

2) le tableau ci-contre est élaboré à partir de cette définition. Les chiffres entre parenthèses représentent les scores associés aux lieux, ils ne servent en rien aux calculs des sommes pondérées des rangs, nous verrons leur utilisation plus tard (cf chapitre 3)

C) Résultats

S' (A) = 513, S' (B) = 530, S' (C) = 316, S' (D) = 437, S' (E) = 503, S' (F) = 370, S' (G) = 494. On en déduit le classement ci-dessous :

Rangs	Lieux
1	C : Allerey
2	F : Promenois
3	D : Pochey
4	G : Jouey
5	E : Clomot
6	A : Huilly
7	B : Angôte

- TABLEAU 3 -

MATRICE DES RANGS

P_{C_j}	16	16	8	12	8	6	4	6	16	4	10	12	3	3
C_j / $r(i)$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
1	C (17,1)	C (16,4)	B (17)	D,F,G (15,7)	C (19)	C (16)	C (19,8)	E,G (16)	F (20)	E (15)	G (16,7)	F (20)	B,C,E,F (19)	B,F,G (15,8)
2	D (15,9)	D (15,3)	A,C (14,6)		G (14)	E,G (15)	E,G (13)		D (14,8)	D (12)	F (14,8)	C (19)		
3	F (10,7)	A (13,2)			E (11)			C (5)	C (8,5)	A,B,C,G (10)	E (9,1)	A,B,E (12)		
4	A,B (8,9)	F (10,3)	E (9,7)	E (7,4)	B (10)	A (10)	A,B,D,F (6,1)	A,B,D,F (0)	E (8)		D (7,2)			A,C,D,E (5,7)
5		B (8,2)	D,F (4,3)	A,B,C (5,2)	A (9)	B (5)			G (6,5)		A,B (4,3)		A,G (10)	
6	G (3,7)	G (4,3)			D,F (3,6)	D,F (0)			A (6,3)			G (3)		
7	E (3,1)	E (2,3)	G (4,9)						B (0,3)	F (5)	C (3,4)	D (2)	D (9)	

CONCLUSION DU CHAPITRE 1

1. Dans les quatre listes, la commune d'Allerey se trouve toujours en tête.

2. Les sommes pondérées ($p_{C_j} \neq 1, \forall j$) des valeurs et celles des rangs parviennent à classer les lieux d'une manière identique : ce résultat quelque peu surprenant dénote cependant une très grande stabilité du classement lorsqu'on modifie le système de notation.

3. Les critères C_1 et C_2 représentent le point de vue "démographique et position géographique" contribuent pour plus du quart à la détermination du classement final.

En conséquence, les lieux bien classés selon ces critères et moins bien selon les autres, se trouvent favorisés lors du classement final : c'est le cas de Pochey ; et vice-versa pour les lieux mal classés suivant C_1 et C_2, c'est ce qui se produit pour Jouey. En effet, Pochey est classé deuxième d'après la méthode des moments d'inertie, mais dès lors qu'on introduit les quatorze critères, sans les pondérer, le hameau tombe à la dernière place. Après avoir affecté les coefficients, Pochey se hisse à la troisième place. Le processus inverse est constaté pour la commune de Jouey.

Essayons de modifier l'importance de C_1 et C_2 en leur attribuant chacun le poids 8 (au lieu de 16), les résultats (sommes pondérées des valeurs) sont les suivants :

S(A) = 887,3 - S(B) = 805,8 - S(C) = 1316,5 - S(D) = 974,5 - S(E) = 1034,5 - S(F) = 1300,4 - S(G) = 1066.

Le classement se présente comme suit :

1. C : Allerey
2. F : Promenois
3. G : Jouey
4. E : Clomot
5. D : Pochey
6. A : Huilly
7. B : Angôte

Pochey, Jouey et aussi Clomot se situent à des niveaux conformes à la variation des poids relatifs aux deux premiers critères, tandis que les autres lieux ne sont pas affectés par le changement.

Pour $p_{c1} = p_{c2} = 12$, on obtient le même classement que pour $p_{c1} = p_{c2} = 16$: S (C) = 1.450,5 ; S (F) = 1.384,4 ; S (D) = 1.099,3 ; S (G) = 1.098 ; S (E) = 1.054,3 ; S (A) = 975,7 ; S (B) = 874,2

Les sommes pondérées des valeurs donnent naissance à un classement qui demeure stable lorsqu'on fait varier le poids de certains critères quitte à modifier leur ordre d'importance. Même remarque en ce qui concerne les sommes pondérées des rangs : le même classement est obtenu en affectant chacun des deux premiers critères du poids 12 (S'(C) = 308 ; S' (F) = 342 ; S' (D) = 421 ; S' (G) = 446 ; S' (E) = 447 ; S' (A) = 485 ; S' (B) = 494)

CHAPITRE 2 : UNE METHODE APPELEE "DEMOCRATIE"

La multidimensionnalité du problème n'est pas considérée ici dans toute son intégrité. Nous verrons, en effet, que seule une partie des critères - la majorité, dans l'optique d'une consultation électorale - est prise en compte.

Nous introduirons les graphes au niveau de la résolution du problème, ce qui ne complique nullement la méthode en question. Au contraire, ils nous permettront d'apporter une solution rapide aux difficultés posées par son principe (la démocratie) et de transposer le problème initial (établissement d'un ordre total strict sur E) à un niveau moins prétentieux (sélection d'un lieu : "le meilleur").

SECTION 1 : Exposé

Cette méthode très connue dans laquelle on assimile les critères à des votants - le nombre de bulletins d'un votant étant assimilé au poids du critère qu'il représente - est surtout utilisée dans le cas de données ordinales.

Le président de séance cherche alors à agréger tous les ordres totaux par la règle de la majorité simple d'où le principe de démocratie : ainsi pour l'ensemble des votants, i "précède strictement" i', si plus de la moitié (pondérée) de ceux-ci ont voté en faveur de cette option.

Le graphique représentant les profils des lieux ou le tableau 3 nous donnent des préordres sur E. Donc, si pour un critère donné on a i et i' ex aequo, la voix de ce votant ne peut être que défavorable à l'option i "précède strictement" i'. De même pour l'option "i' précède strictement" i.

La relation entre guillemets peut être représentée par le signe mathématique $>$, elle définit un ordre total strict. Comme nous pourrons le constater, la règle de majorité ne conduit pas nécessairement à une telle définition. En toute rigueur nous ne devrions même pas employer ici l'adjectif "total" car, si pour la totalité des critères on avait à chaque fois i et i' ex aequo, les options $i > i'$ et $i' > i$ ne recueilleraient aucune voix : ces deux lieux ne pourraient donc pas être comparés (sauf si l'on ramenait la règle de "majorité" à zéro voix, ce qui est tout à fait dénué de sens). Cette hypothèse étant peu vraisemblable nous commettrons cet abus de langage. Si, toutefois, elle se réalisait on s'empresserait de faire intervenir i et i' comme un seul et même lieu.

SECTION 2 : Résolution

Nous proposons d'associer un graphe aux résultats des votes successifs sur les couples du produit cartésien ExE. Dans la mesure où ce graphe représente un ordre total strict, nous appliquerons la règle énoncée au chapitre introductif pour retrouver la "liste" des lieux qui lui correspondent. Sinon, le problème pourra être ramené au niveau d'une simple dichotomie sur l'ensemble E (notons dès maintenant qu'il s'agit de l'objectif d'ELECTRE-I).

1. Le vote sur les différentes options

A) Définition du graphe

Construisons le graphe G = (E,U) à l'aide de la matrice représentant l'ensemble E x E

E \ E		i'	
⋮			
i		aii'	
⋮			

Une case à l'intersection d'une ligne i et d'une colonne i' signifie i "précède strictement" i'

Dans cette case, aii' est le nombre de voix en faveur de cette option.

Sachant que $\sum_{j=1}^{14} p_{cj} = 124$, nous définirons l'ensemble des arcs U pour les conditions :

. si $a_{ii'} \geqslant 63$, alors $(i, i') \in U$

. si $a_{ii'} < 63$, alors $(i, i') \notin U$

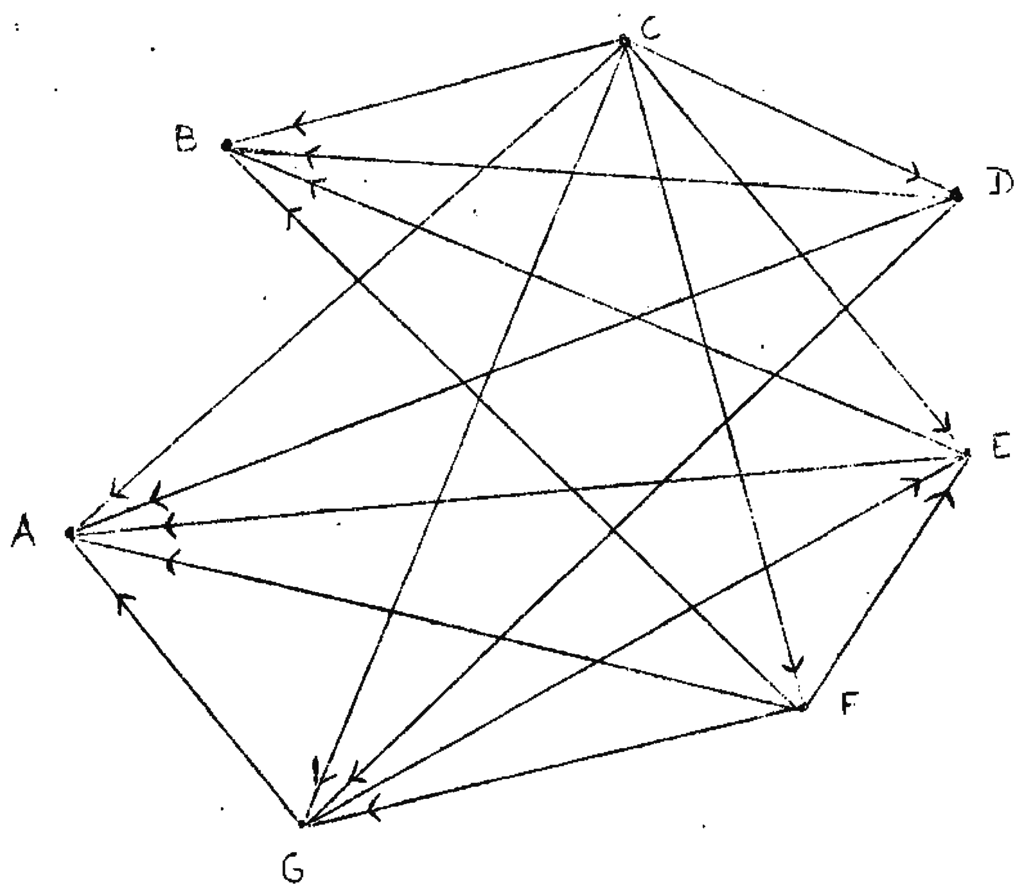
Remarque : $\forall i \in E$, $a_{ii} = 0$ et $(i, i') \notin U$. La relation n'étant pas réflexive, le graphe ne possède pas de boucles.

B) Etablissement du graphe

1) A partir du tableau 3, nous pouvons obtenir la matrice suivante :

E \ E	A	B	C	D	E	F	G
A	0	38	10	37	40	42	52
B	22	0	21	40	43	26	55
C	87	84	0	79	86	68	89
D	74	74	42	0	60	36	63
E	69	66	32	61	0	36	43
F	72	82	53	44	85	0	71
G	65	62	31	52	65	38	0

2) Le graphe ci-contre est déduit de cette matrice :



-2. Délibération

De toute évidence, le graphe obtenu ne constitue pas un ordre total. En effet, la préférence collective définie par la majorité n'est pas toujours transitive : ainsi l'accord des votants est suffisant pour que D $\rangle$ G et G $\rangle$ E, cependant il n'en découle pas logiquement un accord suffisant pour que D $\rangle$ E. D'autre part, il est tout à fait possible que E $\rangle$ D dans quel cas on obtiendrait le circuit : [(D, G) , (G, E) , (E, D)] : c'est ce qui se passerait si la règle de "majorité" était ramenée à 61 voix seulement. (Un chemin est une séquence d'arcs telle que l'extrémité terminale de chaque arc de la séquence correspond à l'extrémité initiale du suivant, le circuit étant un chemin fini dans lequel le sommet initial coïncide avec le sommet terminal).

Remarquons au passage que le circuit est le représentation graphique de l'effet Condorcet.

D'a près ce qui précède, le graphe présent n'est pas complet (un graphe est complet si quels que soient les sommets i et i', appartenant à E, l'un au moins des couples (i, i') et(i', i) appartient à U, à l'exception peut être des couples tels que (i, i), c'est le cas ici, puisque la relation "précède strictement" n'est pas réflexive).

Le président de séance se trouve donc dans l'embarras pour présenter les résultats définitifs du vote. Malgré tout,cet embarras est passager à condition toutefois, que l'alternative suivante soit permise :

-il considère le graphe sans le modifier afin de déterminer le lieu le meilleur : c'est l'optique de la sélection,

-il apporte certaines modifications au graphe pour obtenir un ordre total strict sur l'ensemble des sept lieux : il s'agit de l'optique du classement.

SECTION 3 : Résultats

- 1. L'optiquc de la sélection

A) Le nouveau problème :

Il s'agit d'obtenir une partition de E en deux sous-ensembles :

- Le premier N, que nous appelerons noyau, des lieux retenus,
- le second E-N des lieux éliminés.

Ce nouveau problème dénote une grande modestie, un peu trop même, puisqu'il n'implique pas la mise en évidence directe du lieu à retenir. Dans la mesure où le noyau contient plus de deux éléments, il restera encore à choisir dans N. Cette sélection dans N "ne peut se faire qu'au prix de la recherche de nouvelles informations de base (analyse plus fine des caractéristiques de chaque élément, par exemple) ou de l'acceptation de nouvelles hypothèses, voire même du recours à l'arbitraire (liberté de choix du responsable de la décision) (1).

B) Définition du noyau :

- Il semble logique de vouloir imposer au sous-ensemble N qui contient nécessairement le lieu où sélectionner, les deux propriétés suivantes :

1. Propriété de stabilité externe :

$$\forall\, i' \in E-N, \text{ il existe } i \in N \text{ tel que } (i,i') \in U$$

Autrement dit : tout lieu éliminé est précédé strictement par au moins un des lieux conservés. (Un lieu est éliminé s'il se situe dans E-N. Son élimination est justifiée par le fait qu'il se trouve précédé strictement par au moins un élément de N).

2. Propriété de stabilité interne :

$$\forall\, i' \in N \quad \text{et} \quad \forall\, i'' \in N \quad : (i', i'') \notin U$$

Autrement dit : aucun lieu sélectionné n'est précédé strictement par un autre lieu sélectionné. Les éléments de N ne doivent pas être comparables (en effet, si deux éléments étaient reliés par un arc, on s'empresserait d'éliminer l'élément précédé).

- Le sous-ensemble N de sommets du graphe qui possède les deux propriétés précédemment définies est le noyau de ce graphe.

---

(1) "Peut-on choisir en tenant compte de critères multiples ? Une méthode (Electre) et trois applications" P. BUFFET-J.P.GREMY-M.MARC-B. SUSSMANN. Op. Cit. P.285- Revue Metra, Vol. VI. n°2 -1967-
Il est à noter que ce nouveau problème, tel que nous venons de l'exposer constitue l'objectif même de la méthode ELECTRE-I (Cf Chap. suivant)

C) Conditions d'existence et d'unicité du noyau :

Un graphe quelconque n'admet pas nécessairement un noyau ou au contraire, il peut en possèder plusieurs.

Cependant, nous admettrons que le noyau existe toujours et est unique à condition que le graphe :

- possède un nombre fini de sommets,
- et soit dépourvu de circuits.

D) Mise en évidence du noyau :

Le graphe représentant le vote sur les différentes options répond aux conditions d'existence et d'unicité du noyau.

On vérifie en outre que C constitue à lui seul le noyau : tous les autres lieux sont précédés strictement par C (propriété de stabilité externe) et, puisque C est le seul élément du noyau, il n'est pas précédé par un autre (propriété de stabilité interne).

Allerey (C), selon cette méthode, est sélectionnée pour assurer le rôle de commune d'accueil.

REMARQUE : La présence de circuits dans le graphe n'implique pas l'impossibilité d'application de la méthode. Nous verrons au chapître suivant le moyen qui nous permettra de "rétrécir" les éventuels circuits.

- 2. L'optique du classement

A) Le problème

En apportant certaines modifications au graphe précédent, G, n'est-il pas possible d'obtenir un classement des lieux qui soit un ordre total strict ?

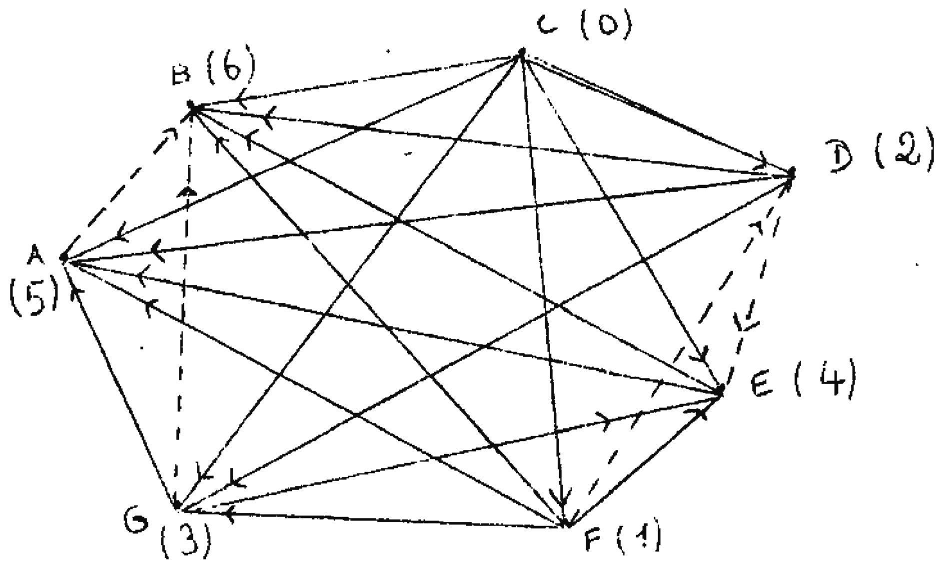
En d'autres termes, il convient de rechercher le graphe G' = (E, U') qui soit complet, transitif et antisymétrique, et dont G = (E, U) est le graphe patiel (1).

B) Obtention de G'

On vérifie que le graphe initial G est déjà antisymétrique : pour obtenir G' il suffit d'adjoindre à G la quantité d'arcs nécessaire pour le rendre complet et transitif. Nous proposons la règle suivante :

Lorsque deux lieux sont jugés incomparables par l'ensemble des votants, ils seront maintenant reliés par un arc dont le sens respect_ra l'option qui a recueilli le plus de voix et sous réserve toutefois que ce nouvel arc n'engendre pas de circuits dans G'. Si cette dernière condition n'était pas respectée, l'orientation de l'arc serait alors donnée par l'option minoritaire. Exemple : pour la collectivité, l'option E > D est préférée à D > E (61 voix contre 60 pour la seconde), mais l'arc (E, D) donne naissance à un circuit. On imposera alors l'arc (D, E).

Le graphe G' affecte la forme suivante :



(1) Après avoir obtenu G', si l'on conserve tous ses sommets, mais si l'on supprime un ou plusieurs de ses arcs, on obtiendra G. On dit que G est un "graphe partiel du graphe donné" G'.

Les arcs ajoutés sont représentés par des lignes discontinues. A côté de chaque lieu, le chiffre entre parenthèses indique le nombre de fois où ce lieu est précédé (strictement).

On vérifie que G' représente un ordre total strict.

C) Résultats

Remarquons que si, dans le cas d'un ordre total strict, on ajoute une unité à chaque chiffre figurant entre parenthèses, le résultat ainsi obtenu n'est autre que le rang r(i) tel que nous l'avons défini au chapître précédent.

r(i)	i	
1	C	ALLEREY
2	F	PROMENOIS
3	D	POCHEY
4	G	JOUEY
5	E	CLOMOT
6	A	HUILLY
7	B	ANGOTE

CONCLUSION DU CHAPITRE 2.

Nous venons de voir que la préférence collective définie par la majorité n'est pas toujours transitive et met en défaut la logique du choix.

Pour laisser cette logique intacte (optique du classement) une <u>règle de type dictatorial</u> a été substituée à la règle de majorité lorsque cette dernière manquait à la propriété de transitivité.

Si nous sortons du cadre de la démocratie parfaite, le classement obtenu - <u>identique à celui donné par les sommes pondérées</u> des valeurs ou des rangs pour $p_{C_j} \neq 1$ - ne procède pas de la dictature. Cette dernière méthode consisterait à choisir le classement établi par un certain critère jouant le rôle de dictateur. On obtient par exemple, le résultat de la dictature du critère C_1 (méthode des moments d'inertie) en considérant le préordre associé à l'échelle K_1 ou en appliquant n'importe quelle méthode et en pondérant de la façon suivante : $p_{C_1} = 1$ et $p_{C_j} = 0 \; \forall j \neq 1$.

D'autre part, on peut toujours sauvegarder le caractère démocratique de la méthode en "supposant" que le nombre de voix en faveur de l'option "Acceptez-vous la nouvelle règle énoncée à l'alinéa B du paragraphe 2 ? " est supérieur ou égal à 63 !

Toutefois, le seule façon correcte de justifier le titre du chapître, c'est de conserver la règle de majorité tout en s'orientant vers un objectif plus modeste (optique de la sélection) : sur la base de cette règle, mettre en évidence un sous-ensemble de lieux (le noyau) contenant la future commune d'accueil. Dans notre exemple, le noyau se réduit à un seul élément : C (Allerey).

Allerey apparaît-elle vraiment comme la commune " la meilleure " pour assurer l'accueil des élèves ? Il semble que ce résultat soit suspect, et cela pour deux raisons :

- affirmer que C " précède strictement " un élément de E-(C) <u>d'après la règle de majorité</u>, signifie qu'<u>il y a environ (1) une chance sur deux pour que cette hypothèse soit vraie.</u>

---

(1) Cf note 1 page suivante

- la sélection de C est obtenue par la majorité (critères en accord avec les options "C précède strictement i"). La minorité ne joue aucun rôle or "même si cette minorité est peu nombreuse, fortement brimée, elle descend dans la rue, mitraillette au poing" (2).

La première raison concerne la règle de majorité. Elle n'est plus une critique fondamentale dès lors qu'on envisage d'augmenter le nombre de voix nécessaire à l'élection d'une option. Le seuil de crédibilité des résultats augmente d'autant, mais en général, le noyau est beaucoup plus riche. Si, par exemple, nous convenons de représenter l'arc (i, i') pour les valeurs de $a_{ii'}$ supérieures ou égales à 82, on obtient alors un noyau N formé par les lieux C, D F. Il reste à choisir dans N la commune d'accueil. On vérifie également que pour $a_{ii'} \geqslant 86$, le noyau contient B, C, D et F.

La seconde raison est relative à la nature du problème considéré. Celui-ci n'est pas résolu entièrement dans un univers multidimensionnel puisque la méthode ne tient pas compte des critères en désaccord avec les options "i précède strictement i'". Or il peut se faire que ces désaccords soient très grands et rendent moins évidente la présence de certains arcs (i, i') dans le graphe. Nous verrons dans le chapitre suivant, comment ELECTRE-I pallie cet inconvénient en calculant le "tableau de discordance".

---

(1) En réalité, la probabilité est un peu plus forte puisque : $89 \leqslant a_{ci'} \leqslant 68, \forall i' \in E -(c)$.

(2) M. MARC - page 18. "L'application du modèle de recherche opérationnelle SCAL" - octobre 1966.

CHAPITRE 3 : LA METHODE ELECTRE-I

Conçue par B. ROY, R. BENAYOUN et B. SUSSMANN, la méthode ELECTRE-I permet d'obtenir "sur la base d'une règle de surclassement, une partition de l'ensemble considéré en deux sous-ensembles distincts : le noyau, sous-ensemble de dimension réduite contenant parmi sa population l'objet recherché, et le reste que l'on élimine" (1).

ELECTRE-I (Elimination Et Choix Traduisant la REalité) considère un problème multidimensionnel. La règle de surclassement qui constitue le coeur de la méthode est en fait, une relation de surclassement multidimensionnelle. Nous verrons que sa définition tient compte :

- de l'importance numérique de la majorité : notion d'indicateur de concordance ,

- du degré d'opposition de la minorité : notion d'indicateur de discordance (et aussi de son importance numérique dans la mesure où on peut éviter qu'un petit groupe de critères minoritaires refuse l'"élection" d'une option : cf. Expression définitive de l'indicateur de discordance).

---

(1) B. ROY - Direction scientifique de la SEMA.
Synthèse et formation n° 50 - Op. Cit. page 88.

SECTION 1 : Problème

- 1. Les données

La totalité de l'information nécessaire à ELECTRE - I est contenue dans le tableau 4 ci-après. Il est déduit du tableau 3 en modifiant l'importance numérique de certains scores, mais en laissant inchangée la position des lieux dans chaque échelle. Cette transformation n'intervient que dans le but d'assurer au miaux le calcul du tableau de discordance :

. Les scores ont été arrondis : le fait de travailler sur des nombres entiers ne modifie pas (ou presque pas) les valeurs des indicateurs de discordance et facilite grandement les calculs.

. Lorsque le coefficient de pondération associé à une échelle, est inférieur à douze, la hauteur de cette dernière (différence entre le score supérieur et le score inférieur) a été réduite en diminuant le plus grand écart constaté entre deux lieux (d'autant plus fortement que le coefficient est numériquement petit) et en maintenant les autres écarts ou en les réduisant d'une quantité moindre. Comme nous l'avons vu au cours de la première partie (Ch. 2 - page 68) cette mesure vise à diminuer l'amplitude de la discordance constatée sur un critère d'importance relativement très faible.

Dès lors, on peut associer à chaque critère C_j un graphe $G_j = (E, U_j)$, en posant :

(1) $(i, i') \in U_j \Longleftrightarrow S_{C_j}(i) > S_{C_j}(i')$, $j = \{1 \dots 11\}$

- TABLEAU 4 -

RECAPITULATION DES DONNEES NECESSAIRES A ELECTRE-I

$P_{C_j} \rightarrow$	16	16	8	12	8	6	4	6	16	4	10	12	3	3
$r(i)$ \ C_j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
1	C (17)	C (16)	B (17)	D,F,G (16)	C (17)	C (16)	C (16)	E,G (16)	F (20)	E (15)	G (16)	F (20)	B,C,E,F (15)	B,F,G (15)
2	D (16)	D (15)	A,C (15)		G (14)	E,G (15)	E,G (13)		D (15)	D (12)	F (15)	C (19)		
3	F (11)	A (13)			E (11)			C (10)	C (9)	A,B,C,G (10)	E (10)	A,B,E (12)		
4	A,B (9)	F (10)	E (12)	E (7)	B (10)	A (12)	A,B,D,F (8)	A,B,D,F (6)	E (8)		D (8)			A,C,D,E (7)
5		B (8)	D,F (10)	A,B,C (5)	A (9)	B (9)			G (7)		A,B (5)		A,G (10)	
6	G (4)	G (4)			D, F (6)	D,F (6)			A (6)			G (3)		
7	E (3)	E (2)	G (8)						B (1)	F (7)	C (4)	D (2)	D (9)	

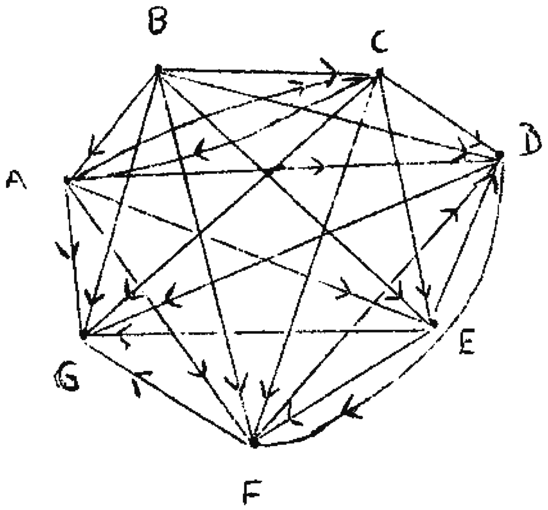
$i \longrightarrow i'$ si et seulement si i "précède strictement" i' dans l'échelle, c'est à dire si $S_{C_j}(i) > S_{C_j}(i')$.

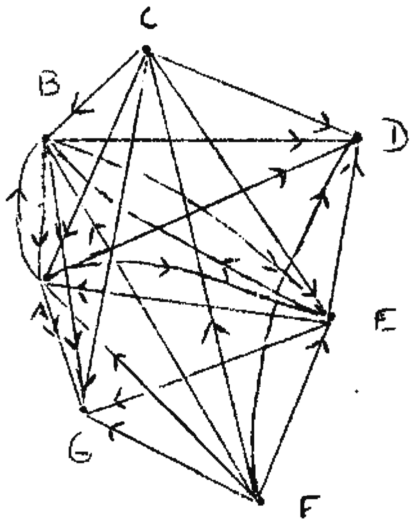
$i \longleftarrow i'$ si et seulement si i' "précède strictement" i dans l'échelle c'est-à-dire si $S_{C_j}(i') > S_{C_j}(i)$.

$i \rightleftarrows i'$ si et seulement si i "se trouve au même niveau que" i' dans l'échelle, c'est-à-dire si $S_{C_j}(i) = S_{C_j}(i')$.

A titre d'exemple représentons deux de ces quatorze graphes :

$G_3 = (E, U_3)$ $\qquad$ $G_{12} = (E, U_{12})$





Nous vérifions qu'un graphe C_j est :

- transitif
- non antisymétrique (la présence de deux arcs entre i et i' traduit le fait que $S_{C_j}(i) = S_{C_j}(i')$)
- complet
- nous conviendrons que $\forall i \in E$, i est dans la relation (1) avec lui-même, c'est-à-dire qu'un lieu est toujours situé à un niveau "au moins aussi élevé" que lui-même. Autrement dit G_j est réflexif (1).

En conséquence, le graphe G_j représente la relation de préordre complet définie sur E, du fait du $j^{ème}$ critère. Il suffit maintenant d'adjoindre en chaque sommet de chacun des graphes le score qui lui est associé pour représenter toute l'information contenue dans le tableau 4 et poser clairement le problème.

- 2. L'énoncé

Comment déduire de ces quatorze graphes G_j, un graphe unique G = (E, U) qui opère la synthèse des quatorze critères ?

Remarquons tout d'abord que si nous avions deux lieux i et i' tels que $\forall_{C_j}$, i soit toujours situé à un niveau "au moins aussi élevé que" i', alors l'intégration de tous les critères que doit représenter G, ne pourrait que respecter cette unanimité. Autrement dit, on serait certain d'obtenir dans G un arc allant de i vers i'.

Tel n'est pas le cas ici. Nous sommes donc contraints de considérer seulement les éléments de E et de rechercher le moyen qui nous permettra de les relier par des arcs.

Ce moyen qui permettra de relier par exemple, les lieux i et i' par une flèche allant de i vers i', devra satisfaire à deux conditions :

- une certaine majorité des critères est en accord avec cette affirmation ($i \rightarrow i'$).
- une certaine minotité ne s'oppose pas trop "violemment" à cette affirmation.

---

(1) Toutefois, les boucles ne sont pas représentées.

Or nous savons (cf. Chapître 2) que lorsque les "options" ne recueillent pas 100 % des voix, le graphe de synthèse obtenu n'est presque jamais complet. L'optique du classement est donc exclue ici.

ELECTRE-I nous propose une partition de E en deux sous-ensembles : l'un N, sera le noyau du graphe G = (E, U), nous savons qu'il contient la future commune d'accueil.

SECTION 2 : Résolution

Elle repose sur la relation de surclassement (lorsqu'il existe dans G un arc allant de i vers i', les auteurs de la méthode disent que i "surclasse" i') qui sera définie à partir de deux indicateurs associés à chaque couple de lieux i,i'.

-1. Les indicateurs

Considérons les profils de deux lieux i et i'. Pouvons-nous placer dans G un arc allant de i vers i' ? En d'autres termes, est-ce que i "surclasse" i' ?

Pour répondre à cette question, les auteurs partagent l'ensemble des critères en deux classes disjointes :

- la classe C(i,i') formée par les critères pour lesquels i est "situé à un niveau au moins aussi élevé que" i', donc en concordance avec l'option i "surclasse" i'.

- la classe complémentaire D(i,i') constituée par les critères en discordance avec elle.

REMARQUE : D'après ce qui précède, les critères pour lesquels i et i' sont classés ex aequo, appartiennent à C(i,i') - et aussi à C(i',i) - ils constituent la majorité : ce n'était pas le cas au chapître 2.

A. L'indicateur de concordance

1. Définition :

L'appartenance de l'arc (i, i') au graphe G, est d'autant plus légitime que le nombre et le poids des critères constituant C(i,i') est grand devant la somme totale des coefficients de pondération. La valeur caractérisant cet ensemble C(i,i') nous est donnée par le rapport $\frac{\text{poids total des critères concordants}}{\text{poids total de tous les critères}}$ appelé indicateur de concordance avec l'hypothèse que i surclasse i', est noté $C_{ii'}$:

$$\boxed{C_{ii'} = \frac{\sum\limits_{j \in C(i,i')} p_{C_j}}{\sum\limits_{j=1}^{14} p_{C_j}}}$$

2. Tableau de concordance :

La comparaison des lieux deux à deux nous amène au tableau suivant :

E \ E	. . .	i'	. . .
:			
i		$C_{ii'}$	
:			

Conformément aux notations utilisées au chapître 2, i est un indice de ligne et i' un indice de colonne. (les auteurs de la méthode utilisent la correspondance inverse).

Notons que :

$$C_{ii'} = \frac{a_{ii'} + \text{nombre de voix en faveur de l'option "i est situé au même niveau que" i'}}{\sum_{j=1}^{14} p_{C_j}}$$

où $a_{ii'}$ est le terme général de la matrice établie au chapitre précédent.

3. Caractéristiques :

Comme nous pouvons le constater, l'indicateur de concordance est toujours compris entre O et 1.

. $C_{ii'} = 1$ si tous les critères placent i à un niveau au moins aussi élevé que i'. Il y a surclassement total de i' par i.

. $C_{ii'} = 0$ si aucun critère ne place i à un niveau au moins aussi élevé que i'. Il n'y a jamais surclassement de i' par i.

L'indicateur de concordance varie de O à 1 de façon non décroissante avec l'importance de C(i,i').

Le tableau de concordance C relatif à notre exemple est le suivant : (voir page 151 bis)

REMARQUE : Pour respecter la tradition suivie dans les applications d'Electre, nous avons porté sur la diagonale principale des $\times$. Cependant, si nous convenons que les graphes G_j sont réflexifs, nous admettons que chaque lieu i est comparable avec lui-même, et C_{ii} signifie alors que tous les critères placent i à un niveau au moins aussi élevé que lui-même. En toute rigueur :

$$C_{ii} = 1, \forall i \in E.$$

C =

E \ E	A	B	C	D	E	F	G
A	*	0,82	0,30	0,40	0,44	0,42	0,48
B	0,69	*	0,32	0,40	0,47	0,34	0,42
C	0,92	0,83	*	0,66	0,74	0,57	0,75
D	0,70	0,68	0,36	*	0,51	0,65	0,58
E	0,68	0,65	0,31	0,52	*	0,31	0,46
F	0,66	0,79	0,45	0,71	0,71	*	0,50
G	0,58	0,56	0,28	0,52	0,73	0,43	*

Après avoir défini l'indicateur de concordance, il nous reste à apprécier l'amplitude de la discordance.

B. L'indicateur de discordance

1. Définition :

Même si $d_{ii'}$ tend vers 1, on devra tenir compte de la position dans les échelles associées aux critères C_j appartenant à la classe D(i,i'), des échelons $S_{C_j}(i)$ et $S_{C_j}(i')$. Dans la mesure où l'on observera $S_{C_j}(i') - S_{C_j}(i)$ prendre des valeurs assez grandes, l'hypothèse de surclassement de i' par i semblera moins légitime.

a) Expression provisoire :

- On peut alors penser à retenir comme définition de l'indicateur de discordance, que l'on notera $d_{ii'}$, l'amplitude du plus grand désaccord divisé par la hauteur de l'échelle la plus haute.

Cette dernière n'est autre que l'amplitude du plus grand désaccord possible, de manière à ce que $d_{ii'}$ soit compris entre O et 1.

$$d_{ii'} = \frac{1}{h} \max_{C_j \in D(i,i')} \left| S_{C_j}(i') - S_{C_j}(i) \right|$$

h étant l'écart maximum qui existe entre les échelons extrêmes d'une même échelle.

- Supposons que treize critères sur les quatorze soient en accord avec l'hypothèse "i surclasse i'". Devons-nous la refuser à cause d'un seul critère, même si l'amplitude de la discordance atteint 1 ? Avant de répondre à cette question, on observera que si ce critère est peu important, $d_{ii'}$ ne pourra pas être égal à 1 puisque nous avons veillé à ce que la hauteur de l'échelle reflète l'importance du critère considéré. Cependant, même si le critère possède un poids assez grand, il peut apparaître un peu arbitraire de rejeter l'hypothèse de surclassement. Cette réponse pourrait à la limite, être étendue à une situation dans laquelle les critères discordants seraient assez nombreux, mais où les écarts paraitraient tous très faibles sauf un seul, lequel traduirait un critère "lui-même minoritaire au sein de la minorité" (1).

En fait, tout dépend du nombre de critères retenus dans l'analyse, mais ces exemples nous amènent à définir une fois pour toute l'indicateur de discordance.

b) Expression définitive

- On commence par ranger les amplitudes des désaccords dans l'ordre décroissant comme l'indique le tableau suivant :

(1) ELECTRE : note de travail n° 49, page 19.

E \ E	. . .	i'	. . .
⋮		.	
i		⋮ $S_{ii'}$ ⋮	
⋮			

On considère tous les critères de la classe D(i,i'), pour lesquels i' est placé à un niveau <u>strictement</u> supérieur à i (puisque D(i,i') est la classe complémentaire à C(i,i') et on dresse la liste ordonnée dans le sens <u>décroissant</u> des écarts discordants.

$S_{ii'}$ est le $S^{\text{ième}}$ de la liste.

Les différentes listes relatives à notre exemple sont consignées dans le tableau ci-dessous (seuls les trois premiers éléments de chaque liste sont reproduits).

E \ E	A	B	C	D	E	F	G
A	—	2 1 —	8 8 8	11 9 7	10 5 5	14 11 10	11 11 10
B	5 5 3	—	8 8 8	14 11 7	10 7 6	19 11 10	11 11 10
C	1 — —	8 2 1	—	11 6 4	6 6 5	11 11 11	12 11 8
D	10 5 3	10 8 7	17 11 10	—	10 10 9	18 8 7	10 9 8
E	11 6 3	8 6 5	14 14 7	13 13 9	—	12 9 8	9 8 6
F	6 5 3	7 4 3	11 10 88	5 5 5	10 9 8	—	10 9 8
G	9 9 7	9 9 5	16 13 12	12 11 8	9 5 5	17 13 7	—

- A partir d'une liste donnée relative à la ligne i et à la colonne i', l'indicateur de discordance $d_{ii'}(S)$ est défini par le rapport de l'amplitude du $S^{ième}$ désaccord à l'amplitude du plus grand désaccord possible :

$$\boxed{d_{ii'}(S) = \frac{S^{ième} \text{ désaccord}}{h = 19}}$$

<u>h étant la hauteur de la plus grande échelle</u> : c'est l'amplitude du désaccord maximum. Ici h = 19.

Les auteurs de la méthode complètent cette définition en posant :

$$\underline{d_{ii'}(S) = 0 \qquad \text{si } D(i,i') = \emptyset}$$

Bien évidemment :

$$d_{ii'}(1) = d_{ii'} = \frac{1}{h} \max_{C_j \in D(i,i')} \left| S_{C_j}(i') - S_{C_j}(i) \right|$$

2. <u>Tableau de discordance</u> :

a) Pour un entier s, les valeurs de cet indicateur pour tous les couples (i,i') sont rassemblés dans un tableau de discordance. Nous calculerons les tableaux D(1) et D(2) qui correspondent respectivement à s = 1 et s = 2.

b) Considérons $d_{B,F(s)}$

$$d_{B,F(s)} = \frac{s^{ième} \text{ désaccord}}{19}$$

α) pour s = 1, on a : $d_{B,F}(1) = \frac{19}{19} = 1$

19 venant en tête de liste (cf. tableau précédent) correspond au désaccord le plus grand :

F est situé sur l'échelon le plus haut de la plus grande échelle, et B sur le plus bas (1). On vérifiera sur le tableau 4, qu'il s'agit de l'échelle relative au critère C_9. En conséquence, le critère le plus opposé au surclassement de F par B, est C_9. <u>Il manifeste son opposition par une intensité de 100 % de l'intensité maximale possible (h)</u>.

(δ) pour s = 2, on a : $d_{B,F}(1) = \frac{11}{19} \# 0{,}58$

11 est le deuxième désaccord le plus grand dans la liste.

On ne tient plus compte de C_9, mais seulement du deuxième critère le plus discordant : on vérifiera qu'il s'agit de C_4.

(Tableaux page suivante)

3. <u>Caractéristiques</u> :

Comme nous l'avons déjà noté, l'indicateur de discordance est toujours compris entre 0 et 1.

. $d_{ii'}(s) = 0$ si $D(i,i') = \emptyset$ (cf. définition) : si on ne tient pas compte des écarts qui précèdent s, on peut dire que tous les critères placent i à un niveau au moins aussi élevé que i'. Jamais i' est situé à un niveau strictement supérieur à i.

. $d_{ii'}(s) = 1$ si le $s^{ième}$ désaccord correspond à l'amplitude du plus grand désaccord possible (ici 10) : i' se situe à l'extrémité supérieure de la plus haute échelle, i à l'extrémité inférieure.

---

(1) On comprend dès lors la réduction de la hauteur des échelles relatives à des critères peu importants : C_9 étant un critère important, la hauteur de son échelle correspond à h, il peut donc se permettre une intensité d'opposition de 100 %.

D(1) =

E \ E	A	B	C	D	E	F	G
A	*	0,11	0,42	0,58	0,53	0,74	0,58
B	0,26	*	0,42	0,74	0,53	1	0,58
C	0,05	0,42	*	0,58	0,32	0,56	0,63
D	0,53	0,53	0,89	*	0,53	0,95	0,53
E	0,58	0,42	0,74	0,68	*	0,63	0,47
F	0,32	0,37	0,58	0,26	0,53	*	0,53
G	0,47	0,47	0,84	0,63	0,47	0,89	*

d(2) =

E \ E	A	B	C	D	E	F	G
A	*	0,05	0,42	0,47	0,26	0,58	0,58
B	0,26	*	0,42	0,58	0,36	0,58	0,58
C	0	0,11	*	0,31	0,32	0,58	0,58
D	0,26	0,42	0,56	*	0,53	0,42	0,47
E	0,32	0,32	0,74	0,68	*	0,47	0,42
F	0,26	0,21	0,53	0,26	0,47	*	0,47
G	0,47	0,47	0,68	0,58	0,26	0,68	*

REMARQUE : si l'on admet la comparaison d'un lieu i avec lui-même, $D(i,i) = \emptyset, \forall i \in E$ et par définition, $d_{ii(s)} = 0$, $\forall s \in N^+$

D'une façon générale, il varie de façon non croissante avec l'appauvrissement de $D(i,i')$.

Remarquons bien que si l'on retient la valeur de l'indicateur de discordance pour $s = 2$, cela revient à oublier le critère le plus discordant, pour $s = n$ les $(n-1)$ critères les plus discordants. Par exemple $d_{BF}(2) = 0{,}58$ équivaut à ne pas tenir compte du critère le plus discordant pour lequel on observerait $d_{BF}(1) = 1$.

Les bases de la relation de surclassement étant jetées, il nous reste plus qu'à en donner sa définition.

- 2. La relation de surclassement

A. Définition

On admettra l'hypothèse que i surclasse i' si et seulement si, simultanément :

- une majorité suffisante se dégage parmi les critères, compte tenu de leur poids, pour placer i à un niveau au moins aussi élevé que i'. C'est à dire, si l'indicateur de concordance $C_{ii'}$ est au moins égal à p. p étant le seuil de concordance que l'on choisira plutôt proche de 1.
- Après s'être fixé une valeur de s, aucun des critères en désaccord avec cette majorité ne s'oppose trop violemment contre cette hypothèse. C'est-à-dire, si l'indicateur de discordance $d_{ii'}(s)$ est au plus égal à q. q est appelé seuil de discordance et devra tendre le plus possible vers O.

B. Le graphe représentatif de la relation de surclassement

Grâce aux valeurs de p, q et s, on peut maintenant, donner un sens à la relation inconnue $G = (E, U)$.

En effet, la relation de surclassement est représentée par un graphe :

$$G(p,q,s) = E, U(p,q,s)$$

avec

$$(i,i') \in U(p,q,s) \text{ si et seulement si : } \begin{cases} C_{ii'} \geqslant p \\ \text{et} \\ d_{ii'}(s) \leqslant q \end{cases}$$

C. Propriétés

1. Si les remarques à propos de la comparaison d'un lieu i avec lui-même sont fondées, alors :

$$C_{ii} = 1 \text{ et } d_{ii}(s) = O \Longrightarrow (i,i) \in U(p,q,s)$$

$$\forall i \in E, \ \forall p, \forall q, \forall s$$

la relation de surclassement serait réflexive, mais les boucles ne seront pas dessinées sur G(p,q,s) de façon à pouvoir extraire le noyau.

2. Nous savons que dans le cas ou l'unanimité n'est pas imposée, c'est-à-dire dès que $p < 1$ et $q > O$, la relation de surclassement n'est plus forcément transitive.

Et puisque G(p,q,s) n'est pas obligatoirement transitif, il se peut très bien que des circuits apparaissent (Cf Chap. 2). Or, nous savons que l'absence de circuits dans un graphe supposé fini entraîne l'existence et l'unicité du noyau. En vue de rétrécir les éventuels circuits on admettra dès maintenant que pour des valeurs réalistes des seuils (p suffisamment grand et q suffisamment petit), il est tout à fait raisonnable de considérer les éléments du circuit comme équivalents eu égard au problème du choix.

3. "La relation de surclassement perd beaucoup de sa signification si l'on attribue à p et q des valeurs quelconques : par exemple, il est difficile de lui donner un sens lorsque p tombe au-dessous de O,5O" (1).

On comprend dès lors les limites auxquelles s'expose la méthode décrite dans le chapître précédent.

D'autres remarques seront proposées en même temps que seront présentés les résultats.

SECTION 3 : Résultats

ELECTRE-I est avant tout une méthode visant à la sélection. Son objectif consiste à isoler le noyau du graphe G(p,q,s). Nous savons que le noyau est constitué par l'ensemble des lieux sélectionnés et que sa dimension doit être aussi réduite que possible (Cf Chapître 2).

Toutefois nous verrons que la recherche du noyau (paragraphe 1) donne de précieuses indications en vue d'un classement éventuel des lieux (paragraphe 2).

- 1. L'optique de la sélection

A) Vers l'obtention d'un noyau unique à élément unique.

1. Il convient tout d'abord de choisir une valeur du paramètre s :

a) Les valeurs de s à considérer dépendent du nombre de critères : "elles ne semblent pas devoir être prises supérieures à 1O % ou 15 % du nombre de poin s de vue (le nombre de valeurs s étant inférieur ou égal à la plus grande valeur de s)(1)

---

(1) B. SUSSMANN p. 287 "Peut-on choisir en tenant compte de critères multiples ? Une méthode (ELECTRE) et trois applications" METRA -1967- (voir autre référence (1) page suivante)

En effet, sur cent critères, il n'est pas grave de négliger les deux ou trois critères les plus discordants, alors que sur six, poser $s = 4$ équivaut à en oublier la moitié et à faire perdre toute l'originalité d'Electre.

b) Il semble aussi que les valeurs de s soient fonction du problème à traiter. Supposons, en effet que le choix de la commune d'accueil doive satisfaire à une contrainte (temps de transport, par exemple). Supposons également un lieu i toujours bien classé sauf pour ce critère (assimilé à une contrainte) où il occupe la dernière place. Pour $s = 1$, i ne sera jamais l'élément unique du noyau, mais pour $s = 2$ on néglige la contrainte et i sera certainement choisi pour assurer le rôle de commune d'accueil. Cette dernière solution doit être normalement rejetée.

L'analyse présente ne paraît pas contenir de contraintes, la délimitation d'un cadre d'analyse (1ère partie - ch. 1) ayant eu pour conséquence de remener le temps de transport au niveau d'un critère, important certes, mais non contraignant.

En conséquence, nous pouvons admettre $s = 2$, mais étant donné le nombre de critères <u>la recherche du noyau sera conduite en posant $s = 1$</u>

$s = 2$ sera considéré pour tester la sensibilité du noyau.

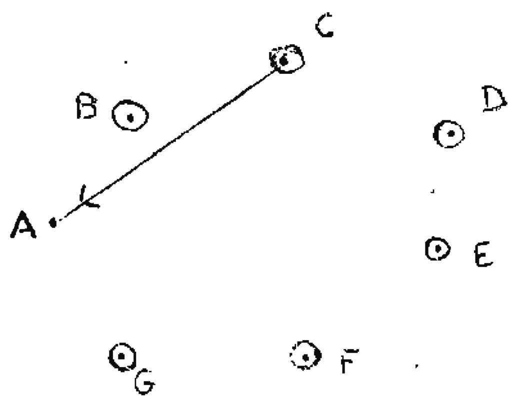
2. Rappelons, en second lieu, que le graphe G (1, O, 1) ne comporte aucun arc. En général, pour des seuils très élevés (p très proche de 1, q très voisin de 0), le graphe correspondant définit une relation de surclassement très pauvre : le noyau contient un nombre important d'éléments.

Il convient <u>d'épurer ce noyau en atténuant la sévérité des seuils</u>, jusqu'au moment où un seul élément surclassera tous les autres : il constituera le choix final. Nous verrons également dans quelle mesure ce raisonnement est critiquable.

B) Les différents graphes de surclassement

1. p = 0,92 ; q = 0,05

Cet intervalle est formé des seuils les plus élevés auxquels conduisent les tableaux C et D (1). Le graphe G (0,92 ; 0,05 ; 1) donne la représentation suivante :



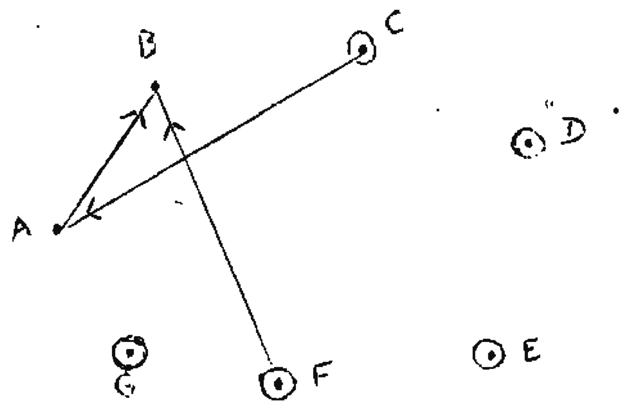
Le noyau est extrêmement riche puisqu'il contient tous les éléments de E sauf A. Dans ce qui suit les sommets du graphe G (p ; q ;1) appartenant au noyau seront encerclés.

L'examen des tableaux C et D (1) nous montrent que 0,92 et 0,05 sont des valeurs correspondant à un seul couple de lieux (C, A)
On vérifie même que pour p = 0,82 et q = 0,26, un arc apparaît, mais le noyau est toujours le même.

Il faut donc se montrer très libéral sur les valeurs de p et de q de façon à ce qu'elles nous donnent une synthèse suffisamment riche en couples comparables. L'antagonisme des critères est donc très important : il fallait s'y attendre d'après l'allure des profils (cf chapitre introductif)

2. p = 0,79 ; q = 0,37

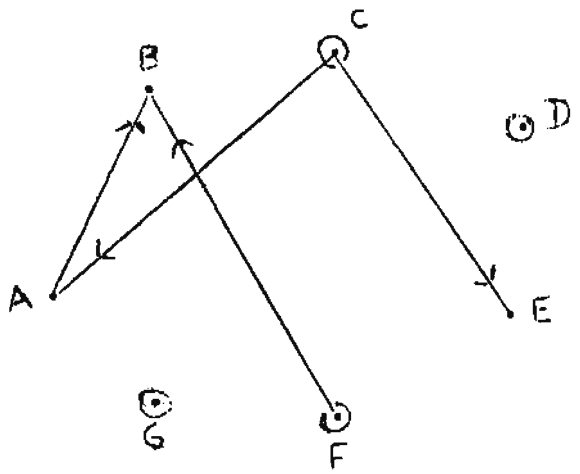
d'où le graphe G (0,79 ; 0,37 ; 1)



Seul le lieu B est éliminé puisqu'il est surclassé par un élément du noyau

3. $p = 0,74$; $q = 0,37$

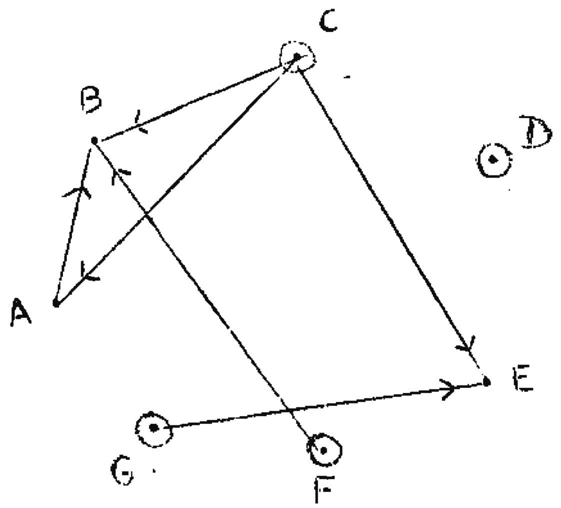
le graphe G (0,74 ; 0,37 ; 1) s'établit comme suit :



à son tour E est éliminé. Mais on devra remarquer que pour des seuils peu sévères, plus de la moitié des éléments se trouvent encore dans le noyau. Il faut en conclure que l'antagonisme des critères est vraiment très fort.

4. $p = 0,73$; $q = 0,47$

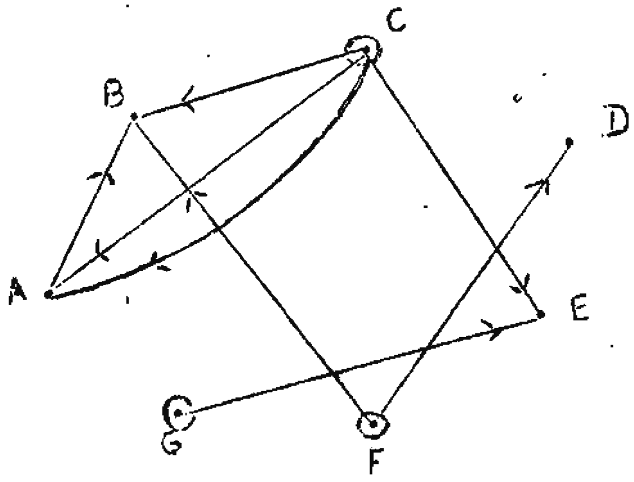
G (0,73 ; 0,47 ; 1) est le suivant :



De nouveaux arcs apparaissent, mais le noyau est le même que celui de G (0,74 ; 0,37 ; 1) On devra encore se montrer moins axigeant sur les seuils. La même représentation est obtenue avec $q = 0,53$ et p inchangé.

5. $p = 0,71$; $q = 0,47$

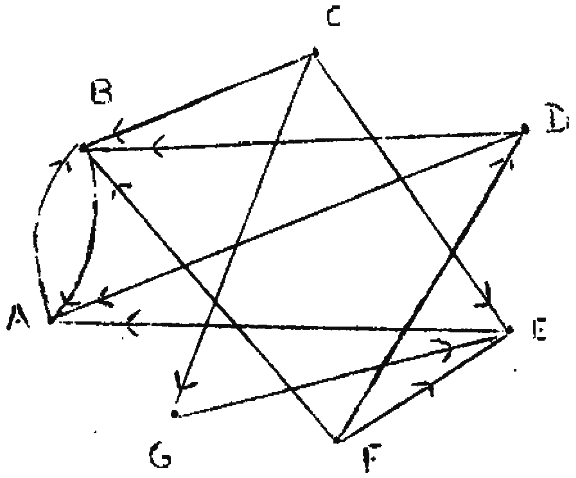
G (0,71 ; 0,47 ; 1) est représenté à la page suivante



Enfin le noyau comprend moins de la moitié des éléments de l'ensemble E

On vérifie que G (0,70 ; 0,53 ; 1) est plus riche en arcs mais que le noyau est toujours constitué par C, F et G

6. p = 0,68 ; q = 0,63



le circuit [(A, B), (B, A)] apparaît. Il convient de procéder à son rétrécissement pour que G (0,68 ; 0,63 ; 1) admette un noyau et un seul

a) Rétrécissement du circuit

+ nous avons déjà noté que la présence de circuits, pour des valeurs réalistes des seuils, implique l'équivalence des éléments du circuit. De ce point de vue l'équivalence des lieux A et B paraît peu justifiée. p n'est pas suffisamment grand et q pas suffisamment petit. Malgré tout on peut être conduit à ne plus les regarder comme distincts eu égard à l'évolution des différents graphes de surclassement : par exemple, dans G (0,68 ; 0,63 ; 1) jamais A et B ne surclassent un élément de E - {A, B} , par contre, A est surclassé trois fois par des éléments de ce sous-ensemble, B aussi. En définitive, c'est ce dernier point de vue qui nous semble le plus normal pour juger de l'équivalence des éléments d'un circuit, car ceux-ci apparaissent le plus souvent à des seuils peu réalistes (comme le prouve

notre exemple), si peu sévères que deux affirmations pourtant contradictoires se trouvent admissibles simultanément. Seul l'examen des graphes de surclassement permet de justifier, dans ce cas, l'équivalence des sommets appartenant aux circuits.
(Si les seuils sont très réalistes, cela prouve tout simplement que les lieux sont à agalité selon tous - ou presque tous - les critères).

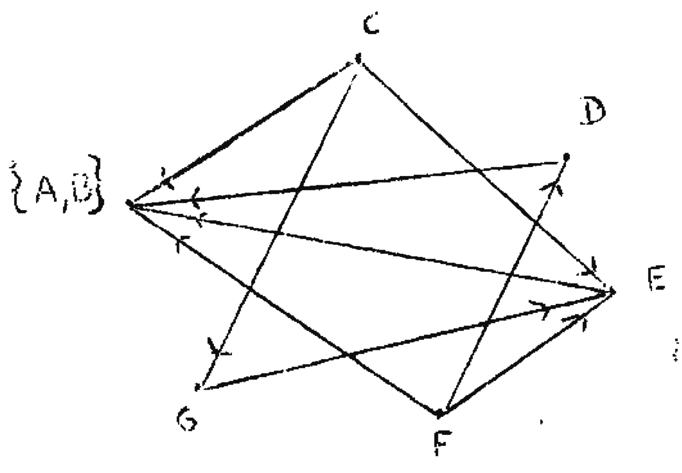
+ Sous ces conditions, désignons par k le circuit $\left[(A,B),\ (B,A)\right]$ et substituons au sous-ensemble des éléments formant k, un seul élément $\{A,B\}$ Nous allons déduire de $G = \left[E,\ U\ (0{,}68\ ;\ 0{,}63\ ;\ 1)\right]$ un nouveau graphe $\bar{G}_{\{A,B\}} = \left[\bar{E}_{\{A,B\}},\ \bar{U}_{\{A,B\}}(0{,}68\ ;\ 0{,}63\ ;\ 1)\right]$ que l'on dit être obtenu par rétrécissement (ou encore par condensation) du sous-graphe $G_{\{A,B\}}$.
Ce nouveau graphe $\bar{G}_{\{A,B\}}$ est défini par les conditions suivantes :

- $(i,i') \in U\ (0{,}68\ ;\ 0{,}63\ ;\ 1)$
  $\left.\begin{matrix} i \notin k \\ i' \notin k \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (i,\ i') \in \bar{U}_{\{A,B\}}\ (0{,}68\ ;\ 0{,}63\ ;\ 1)$

- $(i,i') \in U\ (0{,}68\ ;\ 0{,}63\ ;\ 1)$
  $\left.\begin{matrix} i \notin k \\ i' \in k \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (i,\ \{A,B\}) \in \bar{U}_{\{A,B\}}\ (0{,}68\ ;\ 0{,}63\ ;\ 1)$

- $(i,i') \in U\ (0{,}68\ ;\ 0{,}63\ ;\ 1)$
  $\begin{matrix} i \in k \\ i' \notin k \end{matrix} \Longrightarrow (\{A,B\},\ i') \in \bar{U}_{\{A,B\}}\ (0{,}68\ ;\ 0{,}63\ ;\ 1)$

$\bar{G}_{\{A,B\}}$ s'établit alors comme suit :



b) Recherche du noyau de $\bar{G}_{\{A,\ B\}}$

α) Il convient, maintenant de préciser dans quels cas $\{A, B\}$ surclasse ou est surclassé par un élément quelconque de $E-\{A, B\}$.
Etant donné que A et B sont jugés équivalents, nous dirons que :

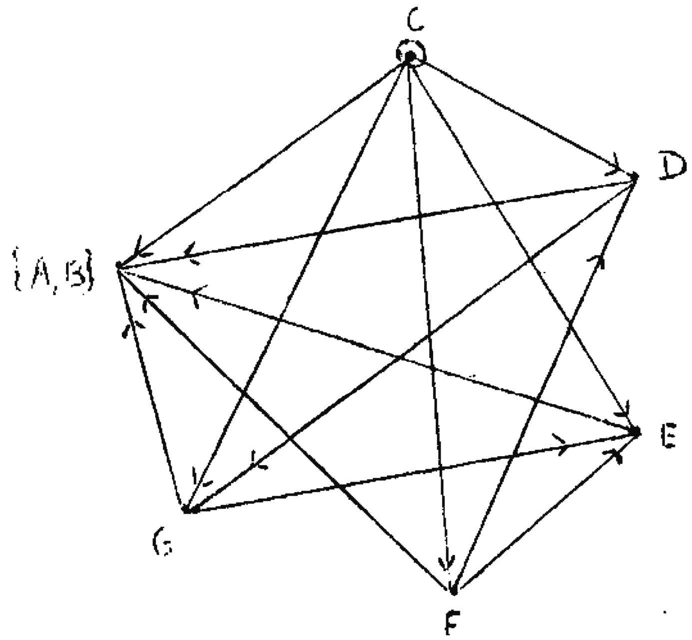
. $\{A, B\}$ surclasse $i \in E - k$ si et seulement s'il existe A ou/ et B $\in$ k tel que A ou / et B surclasse i .

. $\{A, B\}$ est surclassé par $i \in E - k$ si et seulement s'il existe A ou / et B k tel que A ou/ et B est surclassé par i.

β) On vérifie alors que le noyau du graphe $\bar{G}_{\{A,B\}}$ se réduit aux éléments C et F.

7. p = 0,57 q = 0,63

Comme il est facile de le montrer, on obtiendra un noyau unique pour ces valeurs.



Après rétrécissement, on obtient le graphe :

$$\bar{G}_{A,B} = \left[\bar{E}_{\{A,B\}}, \bar{U}_{\{A,B\}} ; (0,57 ; 0,63 ; 1) \right]$$

représenté ci-contre.

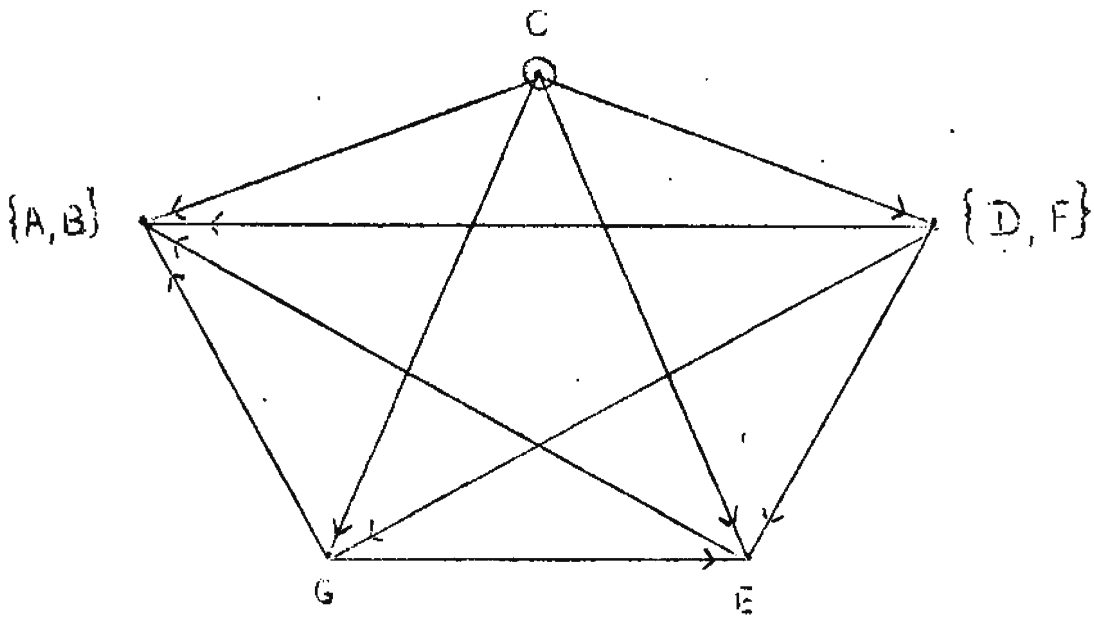
Le noyau se réduit à un seul élément : C

REMARQUE : le choix final C opéré avec s = 2 nous montre une discordance sensiblement moins importante (0,58)(1).
Après rétrécissement des circuits k = [(A,B), (B,A)] et k' = [(D,F), (F,D)] , le graphe

(1) Conséquence directe de l'allure fortement accusée des profi

$$\bar{G}_{\{A,B\}\{D,F\}} = \left[\bar{E}_{\{A,B\}\{D,F\}}, \bar{U}_{\{A,B\}\{D,F\}} (0,57 \; ; \; 0,58 \; ; \; 2)\right]$$

donne la représentation suivante :



C. Validité de la procédure suivie pour obtenir une solution unique

Par tâtonnements successifs, après avoir abaissé graduellement le seuil de concordance et augmenté celui de discordance, nous sommes parvenus à représenter le graphe $\bar{G}_{\{A,B\}} = \left[\bar{E}_{\{A,B\}}, \bar{U}_{\{A,B\}}(0,57 \; ; \; 0,63 \; ; \; 1)\right]$ dont le noyau ne contient plus qu'un élément : C. Dès lors C serait choisi comme commune d'accueil. Mais cette sélection apparaît fortement douteuse, car au cours de la procedure (épuration du noyau initial) la relation de surclassement a perdu beaucoup de son réalisme.

En effet, pour p = 0,92, q = 0,05 et s = 1, C surclasse A, c'est-à-dire que 92 % des critères sont en accord avec cette affirmation, et parmi la minorité on ne constate pour ainsi dire, aucune opposition (0,05).

Mais pour épurer le noyau {C, F} de G(O,71 ; O,47 ; 1) il nous a fallu abaisser fortement p (de O,71 à O,58) et augmenter q (de O,47 à O,63). Dans ces conditions "affirmer" que C surclasse F constitue presque un abus de langage : il n'y a pas plus de 58 chances sur 100 pour que le profil de C soit meilleur que celui de F, et la minorité se montre d'autre part, très agitée (nous complètons le tableau rassemblant les écarts discordants en donnant toutes les valeurs de la différence S_{C_j} (F) - S_{C_j} (D) qui sont : 18, 8, 7, 6, 5). La remarque précédente vaut pour tous les couples (i, i') du dernier graphe de surclassement.

L'épuration du noyau doit cesser lorsque la relation de surclassement s'affaiblit. A cet instant la relation a établi une partition de l'ensemble E en deux sous-ensembles distincts :

- le noyau qui contient les éléments sélectionnés et en particulier le lieu recherché,
- le reste qui renferme les lieux éliminés.

Il nous reste maintenant à effectuer le choix final dans le noyau. Comment ? Dans un article du CETEM (1), Mr. J.L. GUIGOU propose dans le cas de la localisation industrielle, d'utiliser le modèle du professeur Claude PONSARD " pour effectuer un choix rigoureux parmi les sommets du noyau du graphe " (1). Cette complémentarité des deux modèles ne peut pas s'appliquer ici (le modèle - PONSARD vise à la localisation optimale d'une entreprise en fonction d'un critère unique : le profit) : si certains de nos critères reflètent une idée de "coût" (cf. fonction implicite) ils n'entretiennent, évidemment, aucune relation avec la maximisation du profit , notion exclue de notre

---

(1) J.L. GUIGOU : " Des progrès dans la recherche de la localisation optimale (le modèle de Mr C. PONSARD et l'utilisation du programme ELECTRE) - Paris CETEM-1970-Op. cit. p. 73.

On devra convenir d'une méthode beaucoup moins rigoureuse.

Par exemple, le choix ultime au sein du noyau pourrait s'appuyer sur des critères qui jusque là étaient écartés (volontairement ou non) de l'analyse : facteurs politiques, ou sur des critères qu'il conviendrait d'expliciter : coûts. C'est vers cette dernière solution que vont nos préférences.

En effet, la sélection de la commune d'accueil pourrait s'effectuer sur la base d'une évaluation détaillée des différents coûts que l'application d'un tel regroupement entraînerait parmi les éléments du noyau, analyse qu'il aurait été trop coûteux ou trop long d'entreprendre sur la totalité des lieux de F. (cf. le rapport sur un regroupement systématique des écoles primaires rurales - IER - 1968).

D. Pour une procédure moins décisive

1. Choix des seuils :

L'une des solutions proposées ci-dessus ne pourra être adoptée qu'après avoir répondu à la question suivante : quand pourrons-nous nous passer des "services" d'ELECTRE-I ? Autrement dit, quelles sont les limites tolérables des seuils de concordance et de discordance qui nous permettront d'affirmer en toute confiance l'élimination des lieux hors du noyau (c'est-à-dire la sélection des lieux dans le noyau) ?

De toute évidence, il n'existe pas de valeurs standard. Pour Mr. J.L. GUIGOU $p = 0,85$ et $q = 0,10$ consitituent un exemple du seuil "au-delà duquel les résultats sont douteux" (1)

(1) J.L. GUIGOU, p. 73. CETEM.

Pour les auteurs de la méthode, "les valeurs de p sont à choisir dans l'intervalle [1-0,60]; en dessous de p = 0,60, la relation de surclassement perd beaucoup de sa signification quelque soit q" (2).

Aussi choisirons-nous le compromis constitué par le cinquième graphe de surclassement où p = 0,71 ; q = 0,47 et s = 1, quitte à sacrifier le réalisme de la relation au profit de la solution de facilité : à des niveaux plus sévères des seuils, le noyau serait trop riche. Malgré tout, le noyau de G(0,71;0,47;1) soit (C, F, G) comporte tout juste moins d'éléments que ceux situés à l'extérieur.

2. Sélection finale

Le recours à une analyse complémentaire en termes de coûts portant sur trois lieux s'impose naturellement, mais la contrainte "temps" nous engage à l'écarter de la présente étude.

Reste la liberté de choix du responsable de la décision, mais c'est ici que nous délaissons le double rôle de chargé d'étude et de décideur pour ne conserver que le premier. L'ébauche de classement proposée au paragraphe suivant rendra peut-être moins coupable notre subterfuge.

- 2. L'optique du classement

Comme le note B. Roy, "l'intérêt de la relation de surclassement déborde en fait, le cadre du problème qui vient d'être étudié" (1). Nous nous limiterons ici à un classement des lieux par niveau d'intérêt.

(2) ELECTRE p. 34, note de travail n°49
(1) B. ROY : " Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)" - Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. n°8. mars/avril 1968.

Pour obtenir ce classement, nous pouvons envisager deux solutions :

- le lieu i jugé "le meilleur" est retiré de l'ensemble E pour appliquer à nouveau la méthode sur E-(i). Un nouveau noyau sera extrait dans lequel un lieu de très bonne qualité pourra être choisi. Ce second meilleur lieu i' pouvait très bien ne pas apparaître lors de la première application parceque surclassé par le lieu précédemment sélectionné. On peut à la limite, retirer i' de E-(i) et révèler un troisième meilleur lieu. Cette procèdure est longue, surtout lorsqu'on ne dispose pas d'un ordinateur, et suppose qu'à la fin de chaque application, un lieu et un seul, puisse être finalement sélectionné ce qui n'est pas le cas ici. En tout état de cause, la solution suivante sera retenue.

- l'étude directe des résultats obtenus au précédent paragraphe permet d'esquisser le classement désiré.

. L'analyse de l'évolution des noyaux et des graphes G(p,q,1) lorsque varient les seuils, sont les éléments du noyau de G(O,71 ; O,47 ; 1). A et B occuperont le dernier niveau : ils sont surclassés à des seuils très réalistes, nous avons montré, d'autre part, qu'il était convenable de les juger équivalents. Il paraît normal de placer E à l'avant dernier niveau étant donné que son surclassement apparaît dès le troisième graphe et qu'il ne surclasse un autre lieu (A,B) que dans le dernier graphe, c'est-à-dire pour des valeurs si peu sévères que se supériorité sur (A, B) est presque illusoire. D est épuré du noyau à des seuils tout juste corrects, il n'est surclassé que deux foix dans le graphe final : on lui donnera le deuxième niveau.

Niveaux d'intérêt	Lieux
1	C(Allerey), F (Promenois), G (Jouey)
2	D (Pochey)
3	E(Clomot)
4	A(Huilly), B(Angôte)

. Un classement sensiblement différent est obtenu en passant de s = 1 à s = 2, notamment en tirant parti de la quasi-équivalence révélée par le circuit $\left[(D, F), (F, D)\right]$ de $\bar{G}_{(A, B)(D,F)}$ - On peut aussi combiner les deux classements, mais nous nous tiendrons au premier étant donné les valeurs trop faibles des seuils de concordance. A propos du seuil de crédibilité des résultats ainsi obtenus, nous renvoyons aux remarques faites au cours du paragraphe 1.

CONCLUSION DU CHAPITRE 3.

Les premiers utilisateurs d'ELECTRE-I (in Revue Metra vol. VI. 1967) ont montré son originalité. Reproduisons la phrase de Mr. M. MARC qui résume très bien la question : " Ceux qui attendaient une recette magique qui leur fournisse sans coup férir une solution idéale resteront sur leur atteinte. Mais ceux qui comprennent que l'outil (1) ne remplace pas l'ouvrier, ceux qui acceptent volontiers une discipline de pensée qui leur donne un surcroît de travail, mais une plus grande sécurité dans la prise des décisions, seront tentés desuivre le chemin qu'Electre vient de tracer" (in Revue Metra précédemment citée page 296).

Les résultats auxquels parvient la méthode méritent toute notre attention. L'analyse tient compte d'un nombre assez limité de critères et de lieux. Malgré tout, la représentation graphique de ces sept lieux selon les quatorze critères, nous montre une "réalité" dont la complexité est traduite par l'enchevêtrement anarchique des "profils". Dans ces conditions, le bon sens ne nous permet pas d'opérer le choix de la commune d'accueil avec confiance et il serait étonnant qu'une méthode prétendant traduire la réalité nous autorise à le faire. Nous avons vu en effet, que la sélection finale d'Allerey (C) selon les multicritères paraissait très contestable et qu'il valait mieux se contenter d'une relation de surclassement multidimensionnelle plus réaliste aboutissant à un noyau plus riche (ce qui ramenait au problème initial, mais dans un ensemble de dimension plus faible). En outre, un classement par niveaux d'intérêt a été tenté à partir de l'observation des différents graphes de surclassement.

(1) Souligné par nous.

Nous savons que ces résultats ne représentent pas exactement la réalité (il ne peut pas en être autrement puisque G(1,O,1) ne contient aucun arc) - ELECTRE-I en convient. Par exemple, l'option " i surclasse i'" est représentée par l'arc (i,i') $\in$ U (O,71 ; O,47 ; 1) dans la mesure où :

- elle recueille au moins 71 % des mandats en sa faveur (notons au passage que l'option "C surclasse A" reçoit 92 % des mandats).

- l'intensité de l'opposition représentée par le critère le plus fortement en désaccord avec l'option est inférieure ou égale à 47 % de l'intensité maximale (remarquons aussi que l'intensité de l'opposition en ce qui concerne l'option "C surclasse A" ne dépasse pas 5 %).

Malgré le peu de sévèrité de ces seuils nous obtenons un noyau assez riche relativementà l'ensemble E des lieux. Cette conclusion justifie d'ailleurs la participation d'ELECTRE-I à notre étude car, si avec une relation multidimensionnelle de surclassement très pertinente (par exemple, p = O,95 ; q = O,10 et s = 1) un noyau à élément unique avait été obtenu, il aurait été probable que le lieu en question apparaisse le meilleur dès le premier "coup d'oeil".

En définitive, nous estimons qu'il est préférable d'obtenir un classement assez lâche traduisant la réalité, même imparfaitement, plutôt qu'un classement très catégorique mais n'indiquant pas le rapport qu'il entretient avec la réalité. C'est une des raisons qui nous incite à préférer ELECTRE-I à ELECTRE-II (1). Le progrès serait donc grand si une méthode d'analyse multicritère pouvait répondre aux questions:

- Comment obtenir un préordre total sur E ?

- Dans quelle mesure pouvons-nous admettre la véracité de ce classement ?

(1) ELECTRE-II permet d'obtenir un préordre sur un ensemble fini d'objets. cf Manuel de référence du programme ELECTRE II : document technique n° 24. On y trouvera certaines analogies avec les méthodes ELECTRE-f et ELECTRE-g de G. BERNARD et M.L. BESSON , in revue RIRO, V. 3 -1971- p. 40 à 43.

Pour terminer, notons que si notre étude avait pour but de présenter à un décideur politique quelconque deux communes (les deux meilleures), les sommes pondérées des valeurs et des rangs (pour $p_{cj} \neq 1, \quad \forall j$) et la démocratie proposeraient immédiatement Alleroy (C) et Promenois (F), sans jamais envisager la sélection de Jouey (G) qui se trouve toujours au quatrième rang. Pour ELECTRE-I la candidature de cette commune doit être retenue au même titre que les deux premières.

CHAPITRE 4 : ESTIMATION D'UNE POSITION RELATIVE

Cette méthode utilisée par Monsieur J.L. GUIGOU dans sa thèse complémentaire (1) conserve la notion d'indicateurs de concordance et de discordance utilisée au chapitre précédent mais d'une façon globale. Les données sont rassemblées sous forme de préordres mais non intégrées dans une fonction de décision unicritère. L'"estimation d'une position relative" aboutit à un préordre sur E.

SECTION 1 : Exposé

A) Les données du problème

Comme pour ELECTRE-I nous allons considérer la classe C (i,i') formée par les critères pour lesquels i est "situé à un niveau au moins aussi élevé que "i', c'est-à-dire en accord avec l'option "i surclasse i'".

Puis nous formons le tableau suivant :

---

(1) J.L. GUIGOU : "Analyse économique et analyse multidimensionnelle" - Chapitre 1. Thèse complémentaire à paraître : la responsabilité des imperfections concernant l'interprétation de cette méthode ne saurait être imputée qu'à nous-même

E \ E	. . .	i	. . . .	i'	. . .	$\sum$
⋮						⋮
i		$*$		$c^*_{ii'}$		$c^*_{i.}$
⋮						⋮
i'		$c^*_{i'i}$		$*$		$c^*_{i'.}$
⋮						⋮
$\sum$	. . .	$c^*_{.i}$	. . . .	$c^*_{.i'}$	. . .	

où :

$$c^*_{ii'} = \sum_{j \in C(i,i')} p_{cj}$$

$$c^*_{i'i} = \sum_{j \in C(i',i)} p_{cj}$$

et

$$c^*_{i.} = \sum_{i' \text{colonne}} c^*_{ii'}$$

$$c^*_{.i} = \sum_{i \text{ligne}} c^*_{i'i}$$

De même pour $c^*_{i'.}$ et $c^*_{.i'}$

B) Résolution

1. Raisonnons dans la <u>ligne</u> i :

a) $c^{*}ii'$ est la somme des poids p_{cj} des critères en accord avec l'option "i surclasse i'". Ce coefficient représente les "<u>adhésions partielles</u>" des critères à l'option indiquée

b) $c^{*}i.$ représente alors les adhésions partielles des critères aux différentes options :

$$\left(\text{"i surclasse i'"}\right)_{i' \in E - \{i\}}$$

$c^{*}i.$ serait donc un indicateur global de concordance concernant le surclassement de l'ensemble des lieux par i

2. Raisonnons maintenant dans la <u>colonne</u> i :

a) $c^{*}i'i$ révèle les adhésions partielles des critères à l'option "i' surclasse i". Il peut aussi être considéré comme un coefficient de "<u>rejet partiel</u>" relative à l'option "i surclasse i'".

b) $c^{*}.i$ représente donc l'ensemble des rejets partiels des critères en ce qui concerne les options :

$$\left(\text{"i surclasse i'"}\right)_{i' \in E - \{i\}}$$

$c^{*}.i$ peut être considéré comme un indicateur global de discordance du surclassement de l'ensemble des lieux par i.

3. De cette façon nous pouvons alors définir pour chaque lieu i, un coefficient $c^{*}(i)$

$$c^{*}(i) = c^{*}i. - c^{*}.i$$

traduisant "<u>l'adhésion générale</u>" des critères par rapport au surclassement de l'ensemble des lieux par i.

Un préordre sur E est obtenu en rangeant les lieux suivant les valeurs de c^* décroissantes, le lieu le "meilleur" étant associé à la quantité : $\max_{i \in E} \left[c^*(i) \right]$

C) Relations entretenues avec les méthodes précédentes

1. ELECTRE-I :

Nous avons vu que l'indicateur de concordance s'écrivait :

$$cii' = \frac{\sum_{j \in C(i,i')} p_{cj}}{\sum_{j=1}^{14} p_{cj}}$$

Donc :

$$\boxed{c^*ii' = cii' \sum_{j=1}^{14} p_{cj}} \qquad (1)$$

2. Démocratie :

c^*ii' = aii' + nombre de voix en faveur de l'option : "i est situé au <u>même</u> niveau que i'"

aii' étant le terme général de la matrice obtenue au chapitre 2

Section 2 : Résultats

D'après (1), le tableau EXE relatif à notre étude peut-être obtenu en multipliant la matrice des indicateurs de concordance (d'Electre-I) par le coefficient $\sum_{j=1}^{14} p_{cj} = 124$.

Il donne la représentation suivante :

E \ E	A	B	C	D	E	F	G	$\sum$
A	*	102	37	50	55	52	59	355
B	86	*	40	50	58	42	62	338
C	114	103	*	82	92	71	93	555
D	87	84	45	*	63	80	72	431
E	84	81	38	64	*	39	59	365
F	82	98	56	88	88	*	86	498
G	72	69	35	64	81	53	*	374
$\sum$	525	535	251	398	437	337	431	

ce qui implique le classement :

Rangs	lieux	$c^*(i)$
1	C	555 - 251 = 304
2	F	498 - 337 = 161
3	D	431 - 398 = 33
4	G	374 - 431 = -57
5	E	365 - 437 = -72
6	A	355 - 525 = -170
7	B	338 - 535 = -199

CONCLUSION DU CHAPITRE 4

Deux points méritent notre attention.

1) Le problème considéré par cette méthode réalise un compromis entre la multimensionnalité de celui traité par Electre-I d'une part, et l'unidimentionnalité du problème résolu par les sommes pondérées d'autre part.

En effet :

- Les critères ne sont pas fondus dans une fonction de décision unicritère du type sommes pondérées.

- Mais au lieu de considérer pour chaque couple de lieux, comme le fait Electre-I, un indicateur individuel de concordance ainsi qu'un indicateur unique de discordance, la méthode ne retient que des indicateurs globaux.

Remarquons au passage que ce compromis n'est pas de la même nature que celui réalisé par la "démocratie". Dans cette dernière méthode, si la "majorité"des critères est tenue parfaitement en ligne de compte, la "minorité" ne l'est pas du tout. Ici, "majorité" et "minorité" interviennent toutes deux, mais globalement et donc imparfaitement.

2) Le classement obtenu par l'"Estimation d'une position relative" est identique à ceux donnés par les sommes pondérées des valeurs et des rangs et à celui de la "démocratie". Cette liste de lieux se rapproche, d'autre part, du classement par niveaux d'intérêt présenté par ELECTRE-I.

Partant d'une réalité complexe représentée par un enchevêtrement de "profils", comment se fait-il que des méthodes différentes conduisent à des résultas semblables ?

Nous répondrons à cette question à la section 5 du chapitre suivant.

CHAPITRE 5 : L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

L'ensemble E des lieux et l'ensemble C des critères jouent ici un rôle symétrique. Ils sont mis en correspondance dans un tableau E x C des données brutes.

L'analyse factorielle des correspondances du Professeur BENZECRI a pour objet de décrire l'information contenue dans le tableau.

Comment utiliser cette méthode aux besoins de notre étude ?

Contrairement au principe suivi pour les autres chapitres, le problème ne sera pas posé dès le départ. Nous l'aborderons seulement après avoir résolu le problème propre à l'analyse factorielle des correspondances. En conséquence, nous proposons le plan suivant :

- les objectifs de la méthode seront déterminés dans la section 1,
- comment les atteindre ? Tel est le but assigné à la section 2 qui concerne le principe de résolution,
- dans la section 3, les résultats seront présentés et commentés,
- le problème relatif à notre étude sera posé et résolu au cours de la section 4,
- en s'interrogeant sur la nature de l'information contenue dans le tableau des données brutes, la section 5 viendra infirmer, dans une certaine mesure, la résolution précédente, mais confirmer en même temps d'autres résultats obtenus jusqu'à présent. En outre, elle nous permettra de définir clairement la problematique sur laquelle repose l'analyse (conclusion Ch. 5).

En somme, l'effrot consacré au présent chapitre n'aura pas été vain.

SECTION 1 : Les objectifs de la méthode

Dans un premier paragraphe, nous poserons le problème relatif à notre exemple en termes généraux d'abord, en regard de la résolution mathématique ensuite. Pour faciliter l'exposé de cette dernière, nous spécifierons les données du problème dans un second paragraphe.

- 1. La position du problème

A. Généralités :

1) Reportons nous au paragraphe représentant les profils des sept lieux selon les quatorze critères (Ch. Introductif). Pour respecter la terminologie employée dans l'analyse factorielle, nous appellerons $E = \{ i/i = A \ldots G \}$ l'ensemble des observations et $C = \{ C_j/j = 1 \ldots 14 \}$ l'ensemble des variables. Ce graphique schématise alors la représentation des sept observations dans un espace à quatorze dimensions : le profil d'un lieu i indique la position de i par rapport aux autres selon les multicritères.

L'analyse factorielle se propose de rendre cette représentation moins complexe en réduisant le nombre des variables avec le minimum de perte d'information, c'est-à-dire, sans modifier beaucoup la position relative des points-observation.

Grâce à cette réduction, nous pourrons plus facilement apprécier la "proximité" ou au contraire "l'éloignement" de deux profils quelconques représentés dans un espace de faible dimension.

2) Si nous convenons maintenant de représenter les variables dans l'espace des observations, nous obtenons un ensemble de quatorze profils, chacun caractérisant l'état multidimensionnel d'une variable par rapport aux sept observations. Considérons le tableau des scores (tableau 1), nous traçons les sept axes associés aux lieux sur lesquels on repère les positions respectives des quatorze critères. Puisque les scores sont ordonnés dans le sens qui doit servir à fonder le classement final ($S_{C_j}(i) \geq S_{C_j}(i')$ signifie que i est au moins aussi bon que i' suivant C_j), le profil d'un critère C_j résume parfaitement le préordre sur E associé à l'échelle K_j.

Pour éviter toute confusion, nous appelerons :

- Etat, le profil d'un critère C_j : il caractérise la position de chaque lieu le long de l'échelle K_j.
- Profil, le profil d'un lieu i : c'est le terme employé jusqu'ici pour caractériser la position du lieu i le long de chaque échelle K_j.

Etant donné la représentation de ces quatorze états dans un espace à sept dimensions, l'analyse factorielle a pour but de la simplifier en réduisant le nombre des observations avec le minimum de perte d'information, c'est-à-dire, sans modifier beaucoup la position relative des points-variable.

En conséquence, nous pourrons mieux appréhender la "proximité" ou au contraire l'"éloignement" de deux états quelconques représentés dans un espace de plus faible dimension.

3) Dans le premier cas, les variables que la méthode se propose de déterminer et qui résument au mieux l'ensemble C des quatorze variables, sont appelées axes factoriels.

La même dénomination est attribuée aux observations qui, dans le second cas, résument au mieux l'ensemble E des sept observations.

Nous aurons l'occasion de constater que l'espace des variables et celui des observations jouent, dans l'analyse factorielle des correspondances, un rôle symétrique (1). On démontre que les axes factoriels déterminés dans l'un des deux espaces sont les images, par application linéaire, des axes factoriels retenus dans l'autre.

Puisque les axes factoriels se correspondent (et pour des raisons d'ordre mathématique - Cf (2)), nous pourrons représenter les sept profils et les quatorze états sur un même graphique.

Grâce à cette représentation simultanée il sera possible d'étudier <u>la proximité (éloignement) d'un état par rapport à un profil</u> et réciproquement. (3)

En résumé, le problème général peut s'énoncer de la sorte : étant donné un ensemble de profils (d'états) dessiné dans un espace de dimension trop importante pour que l'on puisse en tirer des informations précises, l'analyse factorielle des correspondances a pour objectif de le reproduire dans un espace de plus faible dimension en minimisant la perte d'information qui résulte d'une telle réduction.

(1) Pour une démonstration rigoureuse Cf par exemple, Jean Pierre BALLADUR : "Analyse factorielle des correspondances" p. 63 à 67 in Annales de lINSEE n° 4 [illegible]-

(2) LEBART et FENELON : "Statistique et informatique appliquées" p. 235 et 236.

(3) dire qu'un état est proche d'un profil ou inversement, ne nous renseigne pas beaucoup. Mais nous verrons que la représentation simultanée permet, dans certains cas, de donner une signification "économique" aux axes factoriels et de déterminer les variables qui sont à l'origine de la proximité entre les différents observations.

On se propose d'autre part de représenter la proximité (l'éloignement) des éléments de E x C. Nous verrons plus loin ce qu'il faut entendre par "proximité" ou "éloignement".

B. Le problème face à la résolution

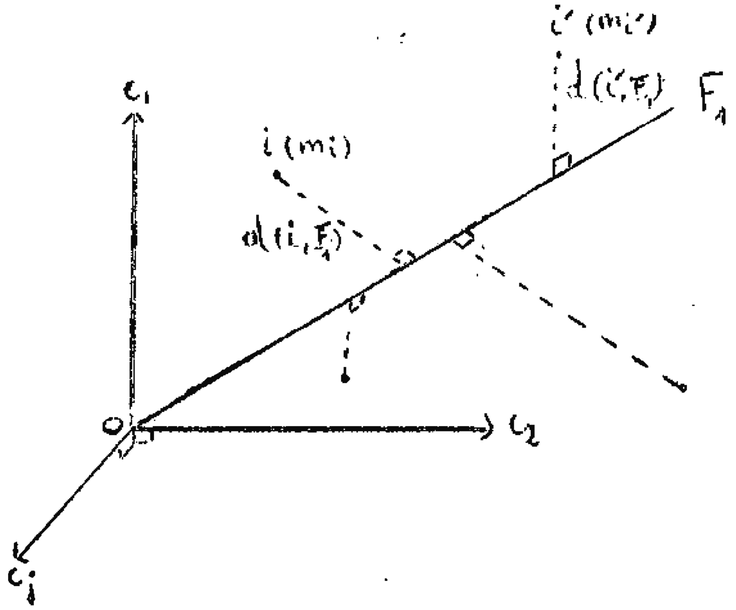
Choisissons par exemple, l'espace des variables pour mener le raisonnement : chaque point - observation est alors caractérisé par un vecteur à quatorze composantes.

Dans cet espace, la distance d(i,i') que nous définirons au paragraphe suivant, traduit la notion de proximité entre deux points-observation :
si d(i,i') est petite on dira que i et i' sont proches ; inversement si d(i,i') est grande les points-observations seront éloignés.

L'analyse factorielle consiste à rechercher le plan (ou les plans déterminés par les axes factoriels pris deux à deux ; le plan dont il s'agira au cours de cet exposé sera déterminé par les deux premiers axes factoriels) passant le plus près de ces sept points et à les projeter ensuite sur ce plan. De cette façon apparaîtra clairement la notion de proximité existant entre les éléments de E. Pour fixer les idées, représentons deux de ces points dans un espace à trois dimensions (l'espace à quatorze dimensions ne se prêtant pas à une représentation graphique) et cherchons tout d'abord à déterminer le premier axe factoriel F_1. Nous supposons en outre, les termes du problème définis.

Chaque point-observation i est affecté d'une masse m_i.
Le problème est de déterminer le sous-espace F_1 à une dimension (c'est-à-dire la droite, or un sous-espace vectoriel contient nécessairement O : F_1 passe donc par O) qui passe le plus près

des points-observations, c'est-à-dire de telle façon que la somme des carrés des distances des points i à l'axe F_1 soit minimale.



Nous sommes donc amenés à minimiser la quantité $\sum_{i \in E} mi\, d^2(i, F_1)$ de façon à ce que la déformation du nuage soit minimum après projection des points-observation sur F_1, et qu'elle assure de ce fait, un certain réalisme à la notion de proximité mesurée par les distances d(i,i').

Mais avant d'aborder la résolution du problème proprement dit, il convient d'en préciser les termes.

-2. Les termes du problème

A. Les données

1) Le tableau d'entrée pour l'ordinateur :

Il s'agit de la matrice des données brutes dans laquelle certaines quantités ont été préalablement ordonnées (cf. ci-contre et ci-dessous).

E \ C	. . .	C_j	. . .	Σ
. . .				
i		x_{ij}		$x_{i.}$
. . .				
Σ		$x_{.j}$		X

x_{ij} est le couple qui associe au critère C_j le lieu i.

$x_{ij} = SC_j(i)$ lorsque l'expression de C_j est qualitative.

$x_{ij} = qC_j(i)$ lorsque l'expression de C_j est quantitative

$$x_{i.} = \sum_{j \in C} x_{ij}$$

$$x_{.j} = \sum_{i \in E} x_{ij}$$

$$X = \sum_{(i,j) \in E \times C} x_{ij}$$

Les $S_{C_j}(i)$ représentent les scores calculés au cours de la première partie, ils sont ordonnés en fonction de la décision finale.

Leq $q_{C_j}(i)$ représentent les quantités qui ont donné lieu aux $S_{C_j}(i)$ lorsque le critère était quantitatif, or nous savons qu'elles ne vont pas nécessairement dans le sens que nous nous sommes fixés. Il convient de les ordonner de telle façon que la quantité $q_{C_j}(i)$ soit une fonction croissante de la position occupée par le lieu i le long de l'échelle K_j. Pour les critères où tel n'est pas le cas, on procède aux transformations suivantes :

$$x_{i1} = \frac{10.000}{q_{C_1}(i)} \quad ; \quad x_{i2} = \frac{10.000}{q_{C_2}(i)} \quad ; \quad x_{i3} = \frac{10}{q_{C_3}(i)}$$

$$x_{i11} = \frac{100}{q_{C_{11}}(i)}$$

Si les données brutes sont positives et ordonnées, elles constituent un tableau très hétérogène où les unités sont diverses (score, ha, $(pas)^2$ etc...).

Variables / Observations	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
A	85	130,4	4	21,3	72	10	0	0	150	10	9	12	10	1
B	85,1	94,4	5	21,3	81	5	0	0	6	10	9	12	19	2
C	191,2	240,5	4	21,3	196	16	2	5	750	10	8	19	19	1
D	174,2	185,9	2,5	69	0	0	0	0	2500	12	12,5	2	9	1
E	58,2	79,9	3,3	31,6	99	15	1	16	625	15	14,3	12	19	1
F	98,4	112,1	2,5	69	0	0	0	0	4000	5	18,2	20	19	2
G	61,8	84,4	2,2	69	130	15	1[illegible]	16	200	10	20	3	10	2

- TABLEAU 5 -

TABLEAU DES DONNEES BRUTES

Afin de rendre les données compatibles et réductibles les unes aux autres, nous allons raisonner sur un tableau de correspondance qui tient compte du caractère probabiliste des données, lesquelles auront subi une série de transformations radicales.

2) Le tableau de correspondance (pour l'analyse)

Il donne la représentation suivante :

E \ C	. . .	C_j	. . .	Σ
. . .	. . .		. . .	. . .
i		p_{ij}		$p_{i.}$
. . .				. . .
Σ	. . .	$p_{.j}$	. . .	1

A partir de ce tableau, on définit :

- la probabilité d'association du couple (i, C_j) :

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{X}$$

- les probabilités conditionnelles d'association du couple (i, C_j)

$$p_{i/j} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \qquad \text{et} \qquad p_{j/i} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

avec :

$$p_{.j} = \sum_{i \in E} p_{ij} = \frac{\sum_{i \in E} x_{ij}}{X} = \frac{x_{.j}}{X}$$

p.j caractérise l'importance du critère C_j, et :

$$p_{i.} = \sum_{j \in C} p_{ij} = \frac{\sum_{j \in C} x_{ij}}{X} = \frac{x_{i.}}{X}$$

pi. caractérise l'importance du lieu i .

Par définition :

$$\sum_{j \in C} p_{.j} = \sum_{i \in E} p_{i.} = 1$$

et : $\sum_{i \in E} p_{i/j} = \sum_{j \in C} p_{j/i} = 1$

REMARQUE : L'emploi du terme probabilité est impropre puisque le tableau ci-dessus n'est pas un tableau de contingence. Néanmoins on peut appliquer l'analyse factorielle des correspondances sur des données brutes, positives. "Même si la somme des lignes ou des colonnes n'a aucun sens, la pratique montre que ce type d'analyse donne des résultats excellents" (1). Nous commettrons cet abus de langage dans la mesure où il facilite la compréhension de l'exposé.

L'analyse factorielle se propose donc de représenter les proximités (éloignements) existant entre les lignes et les colonnes du tableau ainsi présenté. Nous verrons aux alinéas B et C que dans la représentation des proximités, la méthode tient compte des poids associés aux lignes et aux colonnes. Ces poids n'ont évidemment

----

(1) J.L. GUIGOU : Thèse op. Cit page 443

rien à voir avec les coefficients p_{C_j}, <u>ceux-ci ne sont pas intégrés dans l'analyse</u> ; (s'ils l'étaient, la méthode n'en tiendrait pas compte étant donné la transformation des données brutes en "probabilités"). Les poids dont il s'agit ici sont les "lois marginales" $p_{i.}$ et $p_{.j}$.

B. <u>Les coordonnées</u>

Chaque point i possède pour coordonnées les quantités :

$$\left(\frac{p_{ij}}{p_{i.}}\right)_{j \in C}$$

et est affecté de la masse $p_{i.}$.

<u>CONSEQUENCES</u> :

1) Nous obtenons un nuage de sept points-observation représenté dans l'espace des variables à 14-1 = 13 dimensions. En effet, tous les points sont situés dans un hyperplan (sous-espace contenant une dimension de moins que l'espace initial), puisque leurs coordonnées vérifient la relation :

$$\sum_{j \in C} \left(\frac{p_{ij}}{p_{i.}}\right) = 1 \quad \text{(cf. ci-dessus A- 2))}$$

2) Si nous avions retenu pour coordonnées les p_{ij}, cette première transformation des données brutes en $\frac{x_{ij}}{X}$ n'aurait pas opéré une réduction totale puisque les numérations x_{ij} prennent des valeurs très dispersées. Par contre, <u>l'expression pondérée des p_{ij} par rapport à la distribution des lignes i</u>, $\frac{p_{ij}}{p_{i.}}$, rend compte d'une transformation radicale des données. Reste maintenant à apprécier les distances entre les points du nuage des observations.

C. Les distances

Traditionnellement, la proximité entre deux points i et i' est mesurée par la distance euclidienne :

$$d^2(i,i') = \sum_{j \in C} \left[\frac{p_{ij}}{p_{i.}} - \frac{p_{i'j}}{p_{i'.}} \right]^2$$

Mais cette expression de la distance accorde aux quatorze éléments de chaque profil des lieux i et i', le même poids. Pour s'en rendre compte, il suffit de supposer par exemple, que le quatorzième critère prend des valeurs élevées, dès lors le terme $\left[\frac{p_{i14}}{p} - \frac{p_{i'14}}{p_{i'}} \right]^2$ jouera un rôle prépondérant dans la somme $d^2(i, i')$ et par conséquent, dans la détermination des proximités.

Pour atténuer ces disparités, l'analyse factorielle des correspondances utilise la distance du chi-deux :

$$d^2(i,i') = \sum_{j \in C} \frac{1}{p_{.j}} \left[\frac{p_{ij}}{p_{i.}} - \frac{p_{i'j}}{p_{i'.}} \right]^2$$

Dans cette formule intervient maintenant la comparaison terme à terme des éléments des profils de i et de i', sans que ceux-ci possèdent le même poids. La pondération s'effectue par rapport aux vecteurs colonnes du tableau, lesquels représentent la distribution des j.

Insistons bien sur le fait que la mesure de la proximité entre deux points du nuage, tient compte de l'importance des observations (traduite par les $p_{i.}$) et de celle des variables j (exprimée par les $p_{.j}$).

REMARQUE : Pour faciliter les calculs, on ramènera la distance du chi-deux à une distance euclidienne en faisant rentrer le poids p.j dans les crochets.

$$d^2(i,i') = \sum_{j \in C} \left[\frac{p_{ij}}{p_{i.} \sqrt{p_{.j}}} - \frac{p_{i'j}}{p_{i'.} \sqrt{p_{.j}}} \right]^2$$

et en admettant pour nouvelles coordonnées des points-observation les quantités :

$$\left(\frac{p_{ij}}{p_{i.} \sqrt{p_{.j}}} \right)_{j \in C}$$

Dans l'espace des observations on considère les expressions analogues :

$$d^2 \quad (C_j, C_{j'}) \quad = \left[\frac{p_{ij}}{p_{.j} \sqrt{p_{i.}}} - \frac{p_{ij}}{p_{.j'} \sqrt{p_{i.}}} \right]^2$$

et $\left(\dfrac{p_{ij}}{p_{.j} \quad p_{i.}} \right)_{i \in E}$

On comprend alors le rôle symétrique tenu par les deux espaces dans l'analyse factorielle des correspondances.

SECTION 2 : Le principe de la résolution

Ayant représenté le nuage des points-observation dans l'espace des variables, il s'agit maintenant d'extraire parmi l'ensemble C, les variables (axes factoriels) qui résument le mieux la distribution des quatorze variables et et qui sont à l'origine de la proximité des points-observation.

Nous limiterons l'exposé (1) à la détermination du plan formé par les deux premiers axes factoriels et à la signification statistique de ceux-ci.

La signification économique des axes factoriels, c'est-à-dire le problème de l'interprétation, sera abordé à la section suivante.

-1. Détermination du plan factoriel

A. Recherche du premier axe factoriel

Remarquons tout d'abord que l'expression $m_i d^2(i, F_1)$ représente le moment d'inertie du point-observation i par rapport à F_1. La quantité $M_{F_1} = \sum_{i \in E} m_i d^2(i, F_1)$ exprime alors le moment d'inertie du nuage des points i par rapport à F_1. Minimiser M_{F_1} revient à déterminer l'axe d'inertie F_1 qui minimise l'inertie du nuage des points-observation. Il passe par le centre de gravité g du nuage, car en g l'inertie est minimum.

Nous sommes donc amenés à minimiser le moment d'inertie des observations par rapport à un seul point : g.

$$M_g = \sum_{i \in E} m_i \, d^2(i,g)$$

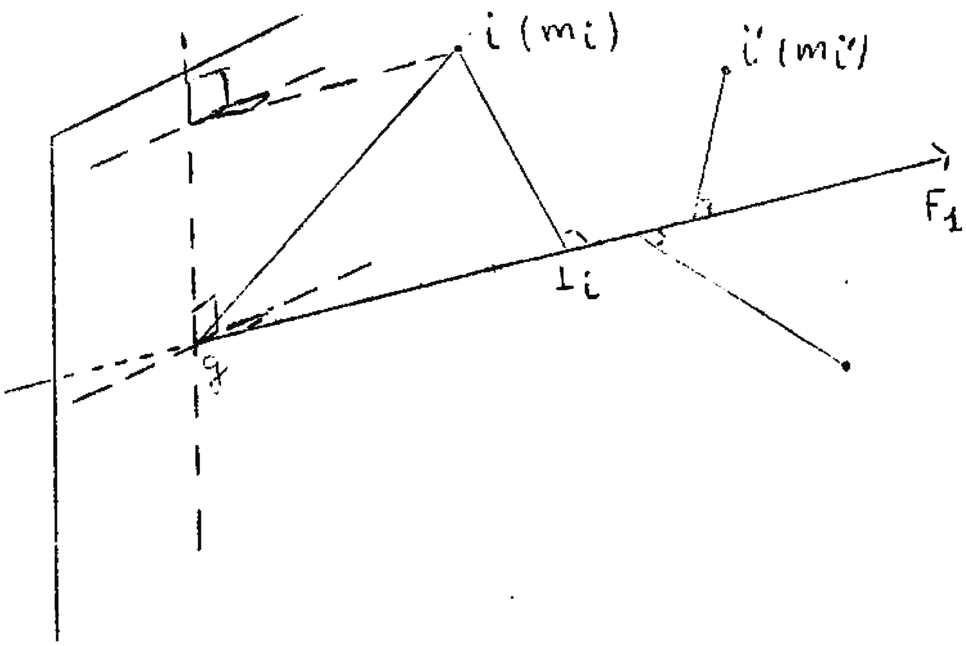
d(i,g) étant la distance du point i à g.

Or :

$$d^2(G,i) = d^2(i, F_1) + d^2(\perp_i, G) \text{ (Théorème de Pythagore),}$$

$\perp_i$ étant la projection de i sur F_1

(1) nous n'entrerons pas ici dans le détail de l'analyse. Nous essaierons seulement d'en montrer le principe, lequel se trouve exposé d'une façon plus complète dans la thèse de J.L. GUIGOU p. 440 à 452.



donc :

$$M_g = \sum_{i \in E} m_i \; d^2(i, F_1) + \sum_{i \in E} m_i \; d^2(I_i, G)$$

C'est-à-dire :

$$M_g = M_{F_1} + M'_{F_1}$$

M'_{F_1} étant le moment d'inertie des points i par rapport au plan perpendiculaire à F_1 et passant par G.

Dès lors, il est clair que si le nuage de points se trouve aligné sur F_1, on a $d^2(i, F_1) = 0$, ce qui implique $M_g = M'_{F_1}$. Dans ces conditions, $\frac{M_{F_1}}{M_g} = 1$, signifie que <u>toute</u> l'inertie du nuage des observations <u>est expliquée</u> par l'axe factoriel F_1 ; il contient toute l'information concernant les proximités entre les points-observation : F_1 est à l'origine de la distribution des points-observation.

D'une manière générale, le rapport $\frac{M'_{F_1}}{M_g}$ donne le pourcentage d'inertie expliquée par le premier axe factoriel :

- lorsque $\frac{M'_{F_1}}{M_g}$ tend vers 1, il y a une certaine dépendance entre les observations et F_1 (cf. ci-dessus).

- lorsque $\frac{M'_{F_1}}{M_g}$ tend vers O, l'axe F_1 n'explique presque pas l'inertie du nuage des points - observation. La projection de ces points sur F_1 s'accompagne d'une perte d'information importante. Si le rapport est égal à O, il y a <u>indépendance</u> <u>totale</u> entre les observations et la variable "synthétique" F_1, si on projetait les points du nuage sur F_1, les proximités obtenues n'auraient plus de signification.

B. <u>Obtention du plan factoriel</u>

Considérons le plan P formé par les deux premiers axes factoriels F_1 et F_2. Le moment d'inertie du nuage des observations par rapport à P s'écrit :

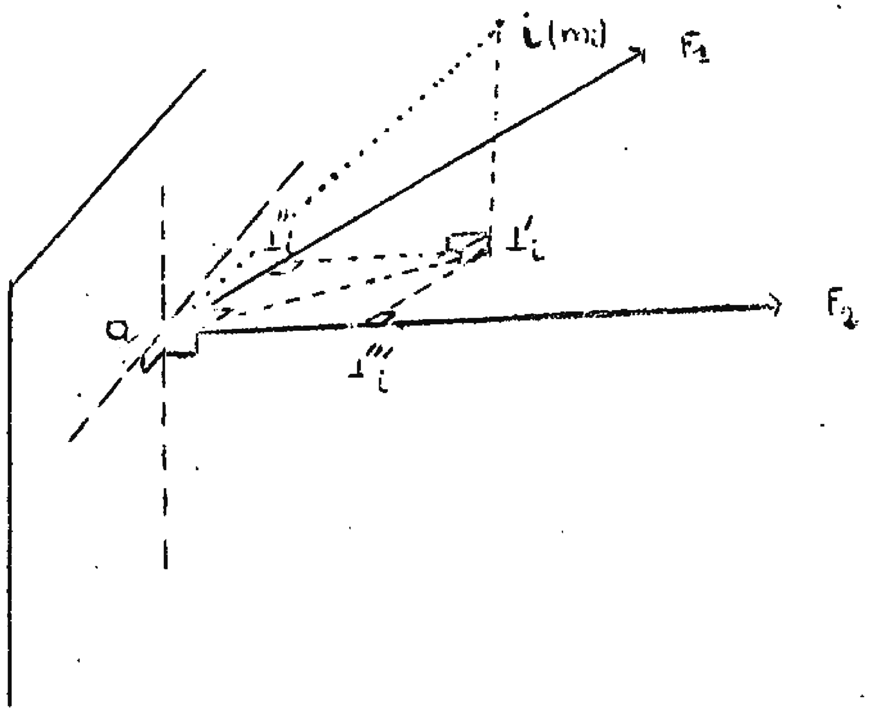
$$M_P = \sum_{i \in E} m_i \, d^2(i, i'_i)$$

$d^2(i, i'_i)$ étant la distance du point i au plan P, et i'_i la projection de i sur P.

Comme précédemment F_2 passe par g, et nous admettrons pour l'instant qu'il est perpendiculaire à F_1 en ce point (les vecteurs f_1 et f_2 qui engendrent ces deux axes étant orthogonaux) :

L'expression du moment d'inertie par rapport au centre de gravité est la suivante :

$$M_g = \sum_{i \in E} m_i \, d^2(i,g)$$



Or :

$$d^2(i, g) = d^2(i, I'_i) + d^2(I'_i, g)$$

Donc :

$$M_g = \sum_{i \in E} m_i \, d^2(i, I'_i) + \sum_{i \in E} m_i \, d^2(I'_i, g)$$

$$M_g = M_P + M'_P$$

M'_P représente le moment d'inertie des points-observation par rapport au plan perpendiculaire à P et passant par g.

Il est donc évident que si toutes les observations s'étalent sur P, les $d^2(i, I'_i) = O$ et $M_P = O$, ce qui implique $\frac{M'_P}{M_g} = 1$. Autrement dit, toute l'inertie du nuage demeure expliquée par le plan factoriel par F_1 et F_2.

Comme précédemment, $O \leqslant \frac{M'_P}{M_g} \leqslant 1$. Si le rapport tend vers 1, les proximités entre points-observation seront respectées une fois réalisée la projection du nuage sur le plan factoriel. Au contraire, si le rapport est proche de O, cela signifie que le plan passe très loin de certains points du nuage. Celui-ci est très mal ajusté par P. En conséquence, la projection des points i s'accompagnera d'une grande perte d'information.

- 2 Résultats admis

1. Considérons par exemple, le premier axe factoriel repéré par le vecteur unitaire u.

Projetons l'ensemble des points-observation sur F_1, et munissons la projection de i de la masse $p_{i.}$

On appelera "variance expliquée par la direction u" et notera V(u) la variance des points ainsi obtenus après projection sur F_1. On démontre que :

a) $V(u) = U' W u$

W est une somme de matrices symétriques. W est donc symétrique. En outre, elle est définie, positive : elle possède, alors des valeurs propres λ_i, positives correspondant à des vecteurs propres f_k orthogonaux.

b) La variance expliquée est maximale dans la direction du vecteur propre f_k qui correspond à la valeur propre maximale λ_1. Elle est égale à λ_1.

c) La variance expliquée par un sous-espace à p dimensions est maximale si ce sous-espace contient les vecteurs propres qui correspondent aux p plus grandes valeurs propres. Elle est égale à la somme des valeurs propres correspondantes.

d) La variance totale (du nuage des points-observation) est égale à la somme des valeurs propres de W : variance totale $= \sum_k k$

2. Conséquences :

a) On peut donc mesurer la proportion de la variance expliquée par un sous-espace construit sur p vecteurs propres, par le rapport :

$$\frac{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k}{\sum_k \lambda_k}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ étant les p plus grandes valeurs propres associées aux p vecteurs propres contenus dans le sous-espace.

b) En particulier :

α) $M_g = \sum_k \lambda k$ = variance totale

β) $M'_{F_1} = \lambda_1$ = variance expliquée maximale. λ_1 étant la plus grande des valeurs propres, donc :

<u>F_1 est l'axe factoriel qui explique le mieux la distribution des points-observation</u>

et :

$$\boxed{\frac{M'_{F_1}}{M_g} = \frac{\lambda_1}{\sum_k \lambda k} = \text{taux d'inertie expliqué par } F_1}$$

γ) Nous avons vu que :

$$M'_P = \sum_{i \in E} m_i \, d^2(i'_i, g)$$

Or :

$$d^2(i'_i, g) = d^2(i''_i, g) + d^2(i'''_i, g) \text{ puisque}$$

F_1 est perpendiculaire à F_2, donc :

$$M'_P = \sum_{i \in E} m_i \, d^2(i''_i, g) + \sum_{i \in E} m_i \, d^2(i'''_i, g)$$

$$= \qquad \lambda_1 \qquad + \qquad \lambda_2$$

D'où :

$$\boxed{\frac{M'_P}{M_g} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_k \lambda_k} = \text{taux d'inertie expliqué par le plan factoriel}}$$

SECTION 3 : Présentation des résultats

En même temps que seront présentés les premiers résultats au paragraphe 1, nous essaierons de "faire le point" sur la méthode. L'interprétation des "proximités" fera l'objet du second paragraphe.

- 1. Résultats

Dans un hyperplan à (14-1) dimensions se trouve représenté un nuage de sept points-observation. Ce nuage possède une certaine forme qui se dérobe à notre "rétine" puisque la représentation graphique dans un espace vectoriel à 13 dimensions s'avère impossible.

L'ordinateur extrait cinq axes factoriels non correlés et passant par le centre de gravité g de l'ensemble E x C. Chaque axe :

1) résume, dans la proportion de la variance expliquée par ladirection qui lui est associée, l'ensemble des quatorze variables. L'axe factoriel apparaît donc comme une nouvelle variable une variable synthétique dont l'interprétation pourra être facilitée grâce à la représentation simultanée des points-observation et des points-variables. A cet effet, rappelons que l'axe factoriel obtenu dans l'analyse symétrique - raisonnement conduit dans l'espace des observations - n'est que la traduction dans les

termes de cette analyse de l'axe extrait dans la première analyse-raisonnement mené dans l'espace des variables (I)

2) Est la cause de l'ordonnancement des points du nuage, dans la proportion de la variance expliquée par la direction qui lui est associée.

Les résultats sont les suivants :

Axes factoriels	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
Part de la variance expliquée	85,70%	9,50%	2,11%	1,67%	0,65%

-Nous remarquons que presque toute l'information concernant la proximité des points-observation et des points-variable est repro--duite par les cinq axes (99,63 % de la variance totale)

-L'axe le plus explicatif des nuages de points est F_1. C'est celui qui est le plus à l'origine des proximités des éléments de E, de C et de ExC, compte tenu de la représentation simultanée, il minimise d'une façon importante la perte d'information par projection .

-Le plan le moins déformant sera constitué par les deux axes, F_1 et F_2, les plus explicatifs des proximités; ce plan factoriel rend compte de 95,20% de la variance totale du tableau analysé.

---

(1) Dans toutes les méthodes exposées jusqu'ici, nous avons raisonné dans l'espace qui nous a servi à poser le problème(Oh instructif), c'est-à dire, l'espace des variables. En réalité, dans ce présent chapitre, la première analyse a été faite dans l'espace des observations : elle fa--cilite grandement les calculs à l'ordinateur en faisant intervenir des extractions de vecteurs propres et de valeurs propres relatives à la matrice (E,E) d'un ordre plus faible que la matrice (C,C) concernant l'espace des variables, L'analyse symétrique concerne donc l'espace des variables.

Remarquons par la même occasion, que l'identification de l'ensemble des critères à l'ensemble des variables et de l'ensemble des lieux à celui des observations va à l'encontre de la convention choisie dans l'analyse factorielle pour laquelle l'ensemble des variables est celui des deux ensembles E et C qui comporte le moins d'éléments.

REMARQUE : L'espace dans lequel la première analyse a été effectuée (cf. note précédente) est de dimension faible (7). Le nuage qui s'y trouve représenté comporte un nombre réduit de points (14). Dès lors on comprend bien qu'il soit aisé de trouver un plan qui, en moyenne, passe le plus près de ces quatorze points repérés dans un hyperplan à 7-1 = 6 dimensions. C'est ce qui explique en partie un pourcentage aussi élevé de la variance totale. Nous verrons plus loins (section 5) que le nombre de dimensions est encore plus faible en réalité.

Bien évidemment, ce plan factoriel constitué par les deux premiers axes sera retenu. On projettera aussi les points sur F_1. Les coordonnées des points dans le plan sont les suivantes :

C	w_{j1}	w_{j2}
C_1	0,72245	- 0,28345
C_2	0,78752	- 0,26269
C_3	1,16126	- 0,30817
C_4	0,54584	0,51233
C_5	1,41651	0,21188
C_6	1,31678	0,47311
C_7	1,03542	0,66706
C_8	1,09196	1,78059
C_9	- 0,33133	0,00921
C_{10}	0,97479	0,09017
C_{11}	0,77265	0,47385
C_{12}	0,84821	- 0,35643
C_{13}	0,92609	- 0,08372
C_{14}	1,03298	0,17478

E	v_{i1}	v_{i2}
A	0,97479	- 0,28072
B	1,61709	- 0,30961
C	0,54044	- 0,16131
D	- 0,28854	- 0,06257
E	0,27197	0,23168
F	- 0,43630	0,01811
G	0,98375	0,59211

w_{j_1} = abscisse du critère C_j sur l'axe F_1.

w_{j_2} = abscisse du critère C_j sur l'axe F_2.

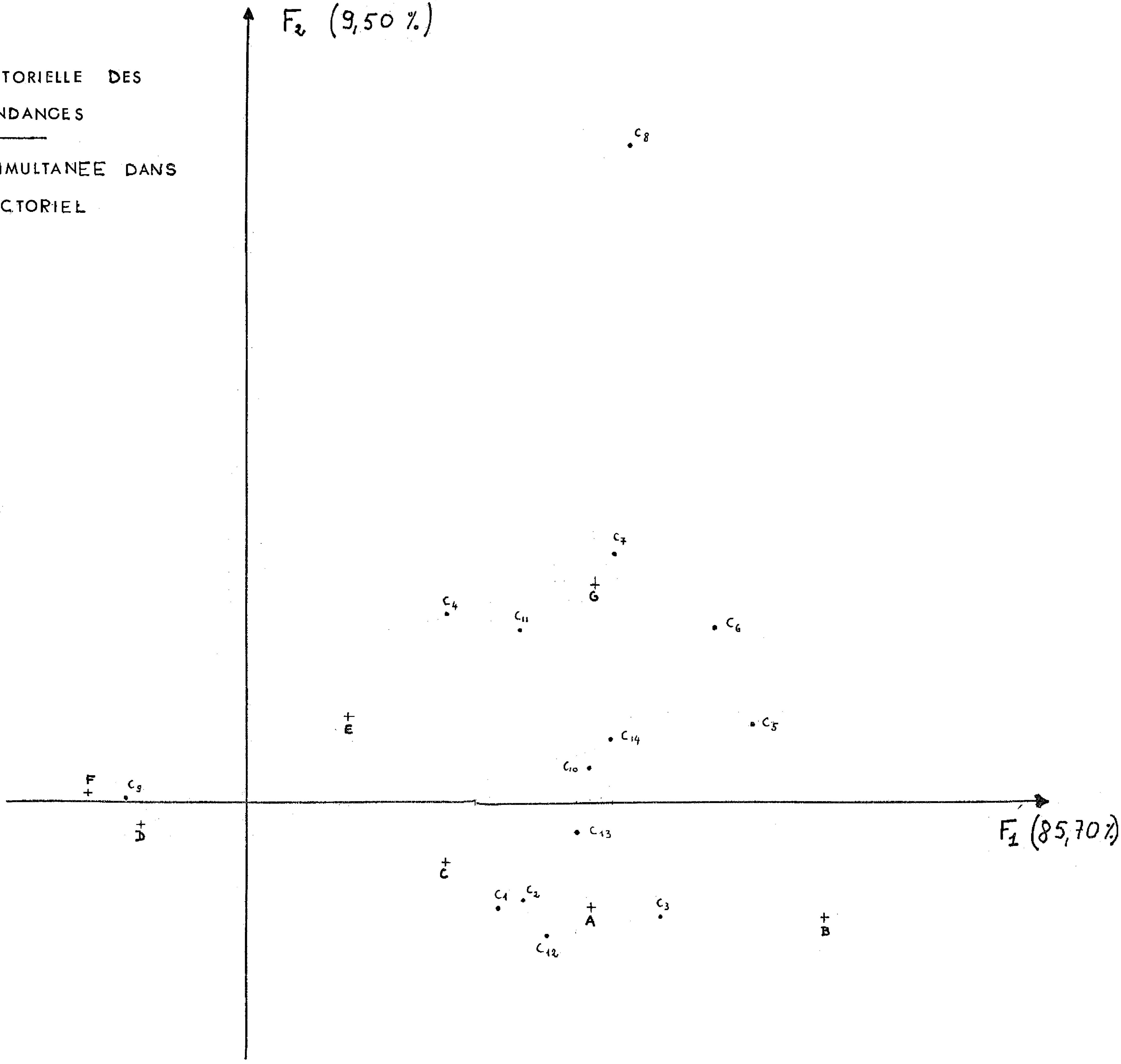
v_{i_1} = abscisse du lieu i sur l'axe F_1.

v_{i_2} = abscisse du lieu i sur l'axe F_2.

L'abscisse d'un point sur un axe mesure le moment d'inertie du point par rapport au plan perpendiculaire à l'axe et passant par g

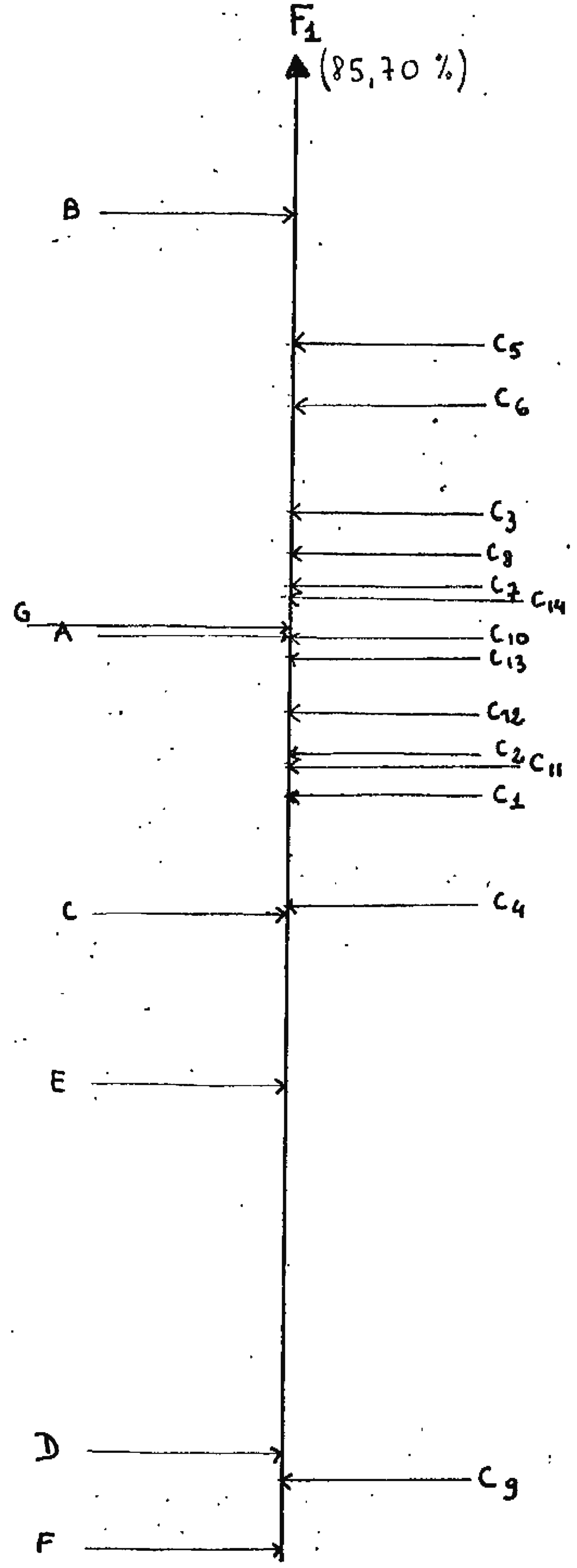
ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

REPRESENTATION SIMULTANEE DANS LE PLAN FACTORIEL



ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

REPRESENTATION SIMULTANEE SUR LE 1er AXE FACTORIEL



-2. Interprétation des résultats

A. Signification du premier axe factoriel

C'est l'interprétation qui demeure, sans doute, la plus délicate. Néanmoins, les abscisses et les corrélations des points-variable par rapport à F_1 permettent de lui donner une certaine signification (cf. Exemple) une fois la représentation simultanée réalisée. Quelquefois l'interprétation de cette variable synthétique s'avère presque impossible (c'est le cas pour notre étude).

1). Un exemple : Supposons que le tableau analysé concernant une étude des structures socio-professionnelles par département, conduise à l'ordonnancement suivant selon le premier axe factoriel :

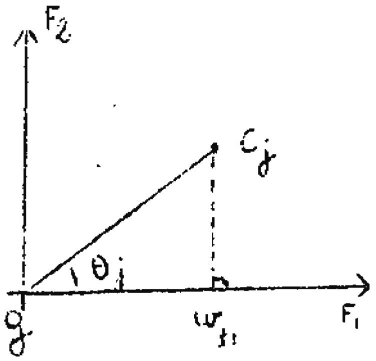
agriculteurs, professions libérales, commerçants, employés, ouvriers $\longrightarrow F_1$

Dans ce cas, F_1 apparaît comme une variable d'industrialisation : plus on se déplace vers la droite, plus on rencontre les catégories socio-professionnelles fréquentes dans les secteurs industriels.

La projection des points-département sur le même axe doit, en principe, confirmer cette interprétation : le degré d'industrialisation des départements devrait être d'autant plus élevé qu'on se déplace vers la droite.

2) Notre étude : - la répartition des quatorze critères le long de F_1 ne nous renseigne pas sur la signification à accorder à cette variable synthétique,

- essayons de retenir les critères qui sont le plus corrélés avec F_1.



$$\cos\theta j = \frac{|w_{j1}|}{gC_j}$$

$\cos\theta j$ mesure la correlation de la variable C_j avec l'axe F_1.

c_j	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
$\cos\theta j$	0,93	0,95	0,96	0,73	0,99	0,94	0,83	0,52	-1	1	0,84	0,92	0,99	0,98

Il apparaît alors que tous les critères ont une bonne qualité de représentation selon F_1 et qu'il serait fallacieux d'en retenir seulement quelques uns pour obtenir à tout prix la signification de l'axe factoriel.

B. Interprétation des proximités

1) Proximité entre les éléments de C.

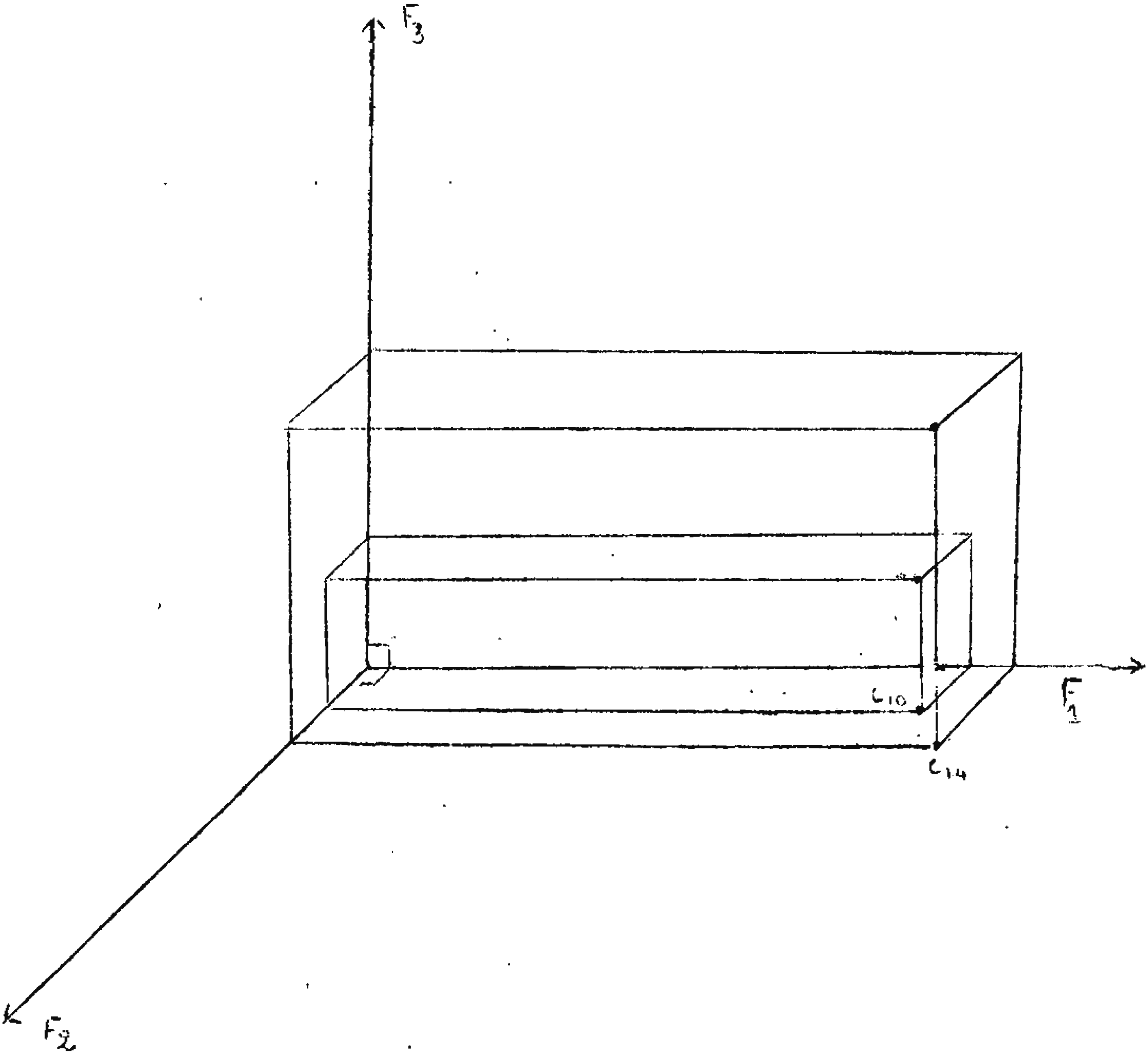
Supposons que C_j et $C_{j'}$ traduisent la même notion (par exemple :"taille de l'école existante") mais que le premier soit apprécié en C_{m2} (p. j est grand) et que la mesure attachée au second soit le m^2 (p.j' est petit). Ils possèdent, par définition, les mêmes états. Nous savons que la distance retenue supprime l'effet de taille des modalités C_j ou $C_{j'}$. En particulier, si deux critères C_j et $C_{j'}$ ont des états identiques, autrement dit si les probabilités conditionnelles relatives à tous les lieux i sont égales, alors leur distance sera nulle :

$$\forall i \in E;\ p_{i/j} = p_{i/j'} \Rightarrow d^2(C_j, C_{j'}) = \sum_{i \in E} \frac{1}{p_{i.}} \left[\frac{p_{ij}}{p_{.j}} - \frac{p_{ij}}{p_{.j'}} \right]^2 = 0$$

rappel : $p_{i/j} = \dfrac{p_{ij}}{p_{.j}}$

$w_{10,3} = 0,21789$

$w_{14,3} = 0,49679$



2) Proximité entre les éléments de E

Puisque $d(C_j, C_{j'})$ et $d(i, i')$ sont des expressions analogues, il suffit de substituer au terme "état", celui de "profil".

<u>La proximité entre deux éléments i et i' de E, traduit le fait qu'ils possèdent des profils similaires</u>. Les deux lieux ont des profils de "notes" plus exactement de probabilités conditionnelles

$\left(\frac{p_{ij}}{p_{i.}}\right)_{j \in C}$ et $\left(\frac{p_{i'j}}{p_{i'.}}\right)_{j \in C}$, relativement semblabes selon les multi-critères.

Ainsi D et F sont assez proches dans le plan factoriel, ce qui traduit bien la similitude des profils correspondant à ces lieux (CF représentation graphique du ch. introductif). Cette proximité observée tend à confirmer, d'autre part, l'équivalence des deux lieux dans le graphe $\overline{G}\{A,B\}\ \{D,F\}$ pour s =2 (CF. ch.3)

Là aussi, il se peut que deux lieux soient très éloignés l'un de l'autre dans l'espace de départ, et qu'ils semblent proches dans la projection. Nous limiterons les commentaires au plan factoriel plutôt que d'analyser les proximités sur F_1.

A part ceux de F et D, on ne constate pas de profils rélativement semblables : les lieux paraissent assez éloignés les uns des autres, conséquence directe de l'enchevêtrement des profils.

3) Proximité entre les éléments de E X C

Cette proximité "croisée" entre un élément i de E d'une part, et un élément C_j de C d'autre part ne nous renseigne pas sur la similitude d'un profil par rapport à un état, ce qui n'aurait aucun sens, mais sur la composition de ces derniers.

Ainsi <u>le lieu i sera d'autant plus proche du critère C_j que celui-ci interviendra fortement dans le profil du lieu.</u>

Par exemple, F est proche de C_9 car ce critère est très bien représenté dans le profil de D (compte tenu des transformations subies par les données). D est proche de C_9 pour la même raison. Nous pouvons, par la même occasion, affirmer que C_9 est responsable de la proximité entre ces deux lieux.

Par contre F et D sont très éloignés de C_5 car celui-ci n'est pas du tout représenté dans les profils de F et de D.

SECTION 4 : Les utilisations possibles de la méthode à notre étude

Dans un premier paragraphe sera envisagé l'établissement d'un préordre sur E. Cette démarche est critiquable sur trois points : le troisième, fondamental dans l'optique de notre étude, fera l'objet de la section suivante.

Dans un deuxième paragraphe, nous montrerons rapidement comment l'analyse factorielle peut être utilisée par le décideur.

Enfin nous verrons, dans un troisième paragraphe, comment cette méthode peut faciliter une future analyse en regroupant certains critères.

1. L'analyse factorielle des correspondances en tant que méthode d'analyse multicritère

A) Position du problème

1) Constation

Nous avons vu qu'un lieu est proche d'un critère lorsque celui-ci se trouve bien représenté dans le profil du lieu.

On peut donc se faire une idée de la répartition des "notes" (plus exactement des probabilités conditionnelles) par critère pour un lieu donné, en observant les "distances" de ce point-lieu aux quatorze points-critère.

2) Conséquence

Plus un lieu sera proche de l'ensemble des critères, et d'autant plus des critères importants, mieux il sera classé.

Soit p_{cj} le poids de c_j (cf 1ère partie), si nous désignons par $d(i,c_j)$ la distance du point i au point c_j, nous calculons pour chaque i la quantité $Q(i) = \sum_{j=1}^{14} p_{cj} \cdot d(i,c_j)$

De cette façon on obtient un préordre sur E en rangeant les lieux suivant les valeurs de Q croissantes, le lieu "le meilleur" étant associé à l'expression : $\min_{i \in E} \left[Q(i) \right]$

B) Obtention du préordre à partir du plan factoriel

Sur le plan le moins déformant, constitué par F_1 et F_2, nous mesurons directement les $d(i, c_j)$ à l'aide d'un double-décimètre. Les "distances" pondérées sont consignées dans le tableau ci-après.

A l'intersection d'une colonne i avec une ligne j nous obtenons la quantité ; $p_{cj} \times d(i,c_j)$

Tableau des distances pondérées

C \ E	A	B	C	D	E	F	G
c_1	4,16	144	33,6	166,4	108,8	192	147,2
c_2	30,4	132,8	41,6	176	113,6	200	140,8
c_3	15,2	36	51,2	118,4	83,2	130,4	72,8
c_4	108	160,8	80,4	122,4	46,8	132	54
c_5	53,6	44,8	76	139,2	91,2	149,6	46,4
c_6	50,4	50,4	60	102	64,2	108,6	21
c_7	38,4	46	38,8	61,2	35,2	64,4	4
c_8	124,8	130,2	121,8	138,6	105	139,8	72
c_9	214,4	315,2	142,4	12,8	104	16	230,4
c_{10}	15,2	30,8	20	50,8	28	56	20

Suite du tableau

c_{11}	78	114	68	120	56	130	24
c_{12}	16,8	99,6	43,2	141,6	98,4	160,8	115,2
c_{13}	6,3	21,6	12	36,9	21,9	41,4	20,4
c_{14}	13,8	22,8	17,7	40,2	22,5	44,4	12,6
Q(i)	806,9	1349	806,7	1426,5	978,8	1565,8	980,8

D'où le classement :

Rangs	lieux
1	C : Allerey
2	A : Huilly
3	E : Clomot
4	G : Jouey
5	B : Angôte
6	D : Pochey
7	F : Promenois

En considérant le premier axe factoriel F_1, on obtient un classement sensiblement différent que nous donnons à titre d'information.

Rangs	1	2	3	4	5	6	7
lieux	A	G	C	E	B	D	F

Que les "distances" soient pondérées ou non, le classement donné par F_1 est exactement le même.

C) Limites de la procédure

1) La "Distance" mesurée est une approximation : les calculs et le classement qui en résulte ne sont pas rigoureux.

2) Cette "distance" en question est la distance enclidienne entre un lieu et un critère :

$$d\ (i,C_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} \left(v_{ik} - w_{jk}\right)^2}$$

v_{ik} = abscisse de i sur F_k

w_{jk} = abscisse de C_j sur F_k

Or jamais une telle distance n'a été définie : l'analyse factorielle des correspondances propose la distance entre deux éléments de l'ensemble E, soit d(i,i'), deux éléments de l'ensemble C, soit $d(c_j, cj')$, mais elle ne retient pas une distance entre éléments d'ensembles différents comme $d(i, c_j)$.

3) Nous verrons à la section 5, qu'il est inutile de retenir un tel classement étant donné la configuration de l'information contenue dans le tableau ds données brutes (tableau 5).

2 L'analyse factorielle des correspondances utilisée comme support de la décision

Monsieur S. EILON (1) note avec raison que la très grande majorité des ouvrages traitant de la théorie de la décision ne donnent pas une définition spécifique du terme (p. 172), et que la plupart des gens confondent décision et résolution (p.174) comme nous l'avons fait en identifiant fonction de décision et méthode de résolution d'une part, chargé d'étude et décideur d'autre part (1° partie : conclusion ch.2). La "décision" recouvre une réalité beaucoup plus complexe (2) que nous contournerons en abandonnant une fois de plus rôle de décideur.

---

(1) Samuel EILON : "What is a decision?" - Management science Vol. 16 . déc. 1969.

(2) I.D.J. BROSS : "Design for decision". Cet auteur montre la complexité de la définition en décrivant le processus de la prise de décision n termes de fonctionnement d'une machine. Cf pages 14 à 25.

La fermeture des écoles primaires rurales est une décision politique. L'économiste a un rôle plus modeste, celui de préparer la décision. Dans cette optique, la représentation simultanée des critères et des lieux dans le plan factoriel constitue le cadre rationnel à partir duquel le décideur pourra choisir la commune d'accueil la plus proche des critères qu'il estime les plus importants.

-3. L'analyse factorielle des correspondances comme méthode de préparation à l'analyse

Nous avons vu que des classements à peu près semblables sont établis par des critères proches dans la représentation simultanée.

Il est donc possible de fondre en un seul ces critères proches, le nouveau critère étant affecté d'un poids correspondant à la somme des coefficients des critères qu'il représente. Dans la mesure où les critères sont nombreux on facilitera grandement l'analyse par ces regroupements successifs.

En ce qui concerne notre étude, cette démarche peut s'avérer superflue : dans la section suivante nous montrerons que le nombre des critères "effectifs" est en fait inférieur à quatorze.

SECTION 5 : La signification du tableau analysé et ses conséquences

-1. L'information contenue dans le tableau des données brutes.

Compte tenu de la réduction des x_{ij} en probabilités conditionnelles, certains lieux possèderont des abscisses nulles (lorsque $x_{ij} = 0$) ou presque (lorsque $x_{ij} \simeq 0$) quand ils seront représentés dans l'espace des critères. Et réciproquement pour les critères dans l'espace des lieux.

Par exemple, $x_{B9} = 6$ signifie que l'abscisse du lieu B n'apparaitra presque pas selon le critère C_9 eu égard à celle de D ou à celle de F : $x_{D9} = 2500$, $x_{F9} = 4000$ (CF. tableau 5). On pourrait avancer d'autres exemples quant à la représentation des critères dans l'espace des lieux.

En définitive une partition s'établit dans le tableau des données brutes :

O = non-information ($x_{ij} = O$ ou x_{ij} petit relativement à certaines valeurs contenues dans une ligne i ou dans une colonne j)

x = information (x_{ij} grand)

Dans ces conditions nous pouvons représenter cette partition en bloc de la façon suivante :

E \ C	C_1	C_2	C_4	C_5	C_{13}	C_{10}	C_{12}	C_6	C_7	C_{13}	C_{14}	C_8	C_{11}	C_9
A	X	X	X	X	X	X	X	X	O	O	O	O	O	X
B	X	X	X	X	X	X	X	O	O	O	O	O	O	O
C	X	X	X	X	X	X	X	X	O	O	O	O	O	X
E	X	X	X	X	X	X	O	X	O	O	O	X	X	X
D	X	X	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X	X
F	X	X	X	O	X	O	X	O	O	O	O	O	X	X
G	X	X	X	X	O	O	O	X	O	O	O	X	X	X

raisonnons dans l'espace des critères, nous constatons alors que les critères C_7, C_{13}, C_{14}, C_8, et dans une certaine mesure C_{11}, ne servent en rien à l'analyse. En ce qui concerne l'espace des lieux, le nombre de dimensions est diminué d'autant par l'élimination de D, F et dans une certaine mesure par celle de B et celle de G.

-2 . Conséquences.

A) Justification du pourcentage extrêmement élevé de la variance expliquée par le plan factoriel.

A propos de la représentation du nuage des C_j dans l'espace des observations (lieux), nous avions déjà remarqué qu'il était facile de déterminer un plan qui ajuste approximativement quatorze points dans une variété linéaire à six dimensions (CF. section 3-1). A fortiori si l'on réduit la dimension de l'espace de départ : en réalité les C_j sont représentés dans un espace possédant au plus quatre dimensions, c'est-à-dire dans un hyperplan à trois dimensions tout au plus. Les lieux i forment un nuage de sept points dans un hyperplan à huit dimensions.

B) Non prise en compte du classement obtenu à partir du plan factoriel.

Si les critères C_7, C_{13}, C_{14}, C_8, et C_{11} doivent être éliminés de l'analyse, la présence de ceux-ci sur le plan factoriel fausse considérablement l'évaluation des $d(i, c_j)$ et donc le classement obtenu.

Il serait intéressant de recommencer l'analyse factorielle des correspondances à partir du tableau : $E \times \left[C - \{c_7, c_8, c_{11}, c_{13}, c_{14}\} \right]$

C) Justification de la ressemblance des résultats obtenus par les méthodes d'analyse multicritère.

- Rappel :

Méthodes Rangs	Sommes pondérées (1) des valeurs	Sommes pondérées (1) des rangs	"Démocratie" (2)	ELECTRE I (3)	Estimation d'une position relative
1	C	C	C	C,F,G	C
2	F	F	F	D	F
3	D	D	D	E	D
4	G	G	G	A,B	G
5	E	E	E		E
6	A	A	A		A
7	B	B	B		B

(1) $p_{cj} \neq 1, \forall j$

(2) optique du classement

(3) classement par niveaux d'intérêt

- Remarque : La méthode des sommes pondérées appliquée aux scores du tableau 4 (ELECTRE -I) nous donne des résultats assez proches de ceux rappelés ci-dessus. Ilss'établissent de la façon suivante :

rangs	1	2	3	4	5	6	7
lieux	F	C	D	G	A	E	B

Dans la conclusion du chapitre 1 de cette seconde partie, nous avions déjà remarqué la stabilité de la méthode des sommes pondérées en ce qui concerne la modification des scores.

- Si l'analyse avait retenu l'ensemble des quatorze critères, les résultats obtenus d'après les différentes méthodes auraient été, sans doute, eux-mêmes différents. En réalité le nombre des critères est plus faible, neuf, trop faible, semble-t-il, pour que des méthodes d'utilisation complexe et traduisant le plus possible la réalité puissent arriver à se "distinguer" par des classements considérés comme "meilleurs". Si on supprimait les critères c_7, c_{13}, c_{14}, c_8, c_{11} pour lesquels on constate évidemment un grand nombre de lieux ex-aequo, la réalité apparaîtrait beaucoup moins complexe : en fait, la complexité traduite par le graphique du chapitre introductif n'est qu'une apparence.

CONCLUSION DU CHAPITRE 5

A) Dans la mesure où le nombre des critères est élevé, ainsi que celui des lieux et à condition que le tableau des données brutes ne présente pas une partition en bloc, l'analyse factorielle des correpondances, sans aucune hypothèse préalable sur les données, se propose de rendre intelligible l'information contenue dans ce tableau. En déterminant un plan constitué par les deux premiers axes factoriels il est possible :

1) de réduire le nombre des critères en vue de faciliter l'élaboration du classement à partir d'une méthode d'analyse multicritère.

2) de présenter simplement le plan factoriel obtenu à un décideur politique qui choisira la commune d'accueil. Dans cette optique le rôle de l'économiste consiste à dresser le tableau des données brutes dont les dimensions sont telles qu'elles constituent un obstacle à l'assimilation par le décideur de l'information. L'analyse factorielle intervient dans un deuxième temps pour représenter ces données dans un espace de plus faible dimension, avec le minimum de perte d'information. Dans le troisième temps le décideur pourra rapidement choisir la commune la plus "proche" des critères qu'il estime importants.

3) d'obtenir, dans les limites exposées plus haut, un préordre sur l'ensemble des lieux.

Remarque : Dans l'élaboration des données, l'analyse factorielle des correspondances possède un avantage incontestable sur les autres méthodes : alors qu'il peut paraître facile de cardinaliser certaines variables qualitatives donnant lieu à des échelles du type {nul, passable, ..., très bien} , d'autres variables qualitative,par contre , demeurent non quantifiables. Par exemple : "le lieu i est-il un hameau ?", dans ce cas on peut affecter le nombre 1 à la réponse affirmative et O si la réponse est négative ou inversement. En tout cas on pourra très facilement obtenir les probabilités d'association.

B) Dans la mesure où le nombre des critères est faible, de mêmeque celui des lieux sans que pour autant une partition soit établie sur le tableau ExC, l'analyse factorielle ne présente un intérêt que si l'information se dérobe encore à la "rétine" du décideur. S Si le nombre des critères est vraiment très faible le "bon sens" serait certainement la meilleure des méthodes.

C) Dans la mesure où E et C sont ni trop grands, ni trop petits et que E x C présente une partition en bloc, nous sommes ramenés au cas précedent (B).

Ces trois conditions définissent justement la domaine d'application de notre analyse, et amènent à la conclusion suivante :

Si l'analyse devait être recommencée (sous les mêmes conditions) nous aurions la presque certitude que les résultats s'ordonnent de la même façon quelle que soit la méthode d'analyse multicritère retenue. En conséquence la méthode dont les modalités d'application sont les plus simples et donc moins onéreuse et la plus rapide sera choisie : sommes pondérées des rangs.

Bien souvent, les imperfections de certains développements furent attribuées au cadre trop étroit de notre mémoire. De ce fait nous admettons que l'étude du regroupement des écoles primaires rurales profiterait de l'extension de ce cadre : la charge de la preuve nous appartient.

SECTION 1 : La préparation de l'analyse

1. Le cadre de l'analyse

Dans le premier chapitre, la détermination des différents éléments à regrouper était plus une manière de poser le problème que d'envisager le regroupement systématique et intégral de l'ensemble de départ.

Cependant, l'instrument qui nous a permis d'élaborer l'"espace cadre d'analyse" possède plus de généralité qu'il ne paraît à première vue :

1) Etablissement d'une pré-partition

a) Il convient tout d'abord de déterminer successivement plusieurs sous-ensembles afin d'établir une pré-partition sur l'ensemble de départ (le canton par exemple) : chaque sous-ensemble E_k minimise un indice de désutilité globale D_k qui agrège deux indices partiels (N : effectif ; T : transport)

$$D_k = \alpha N_k + \beta T_k$$

b) Il serait souhaitable d'estimer les paramètres α et β qui représentent respectivement l'importance accordée à N et à T. Nous avions posé $\alpha = \beta = 1$

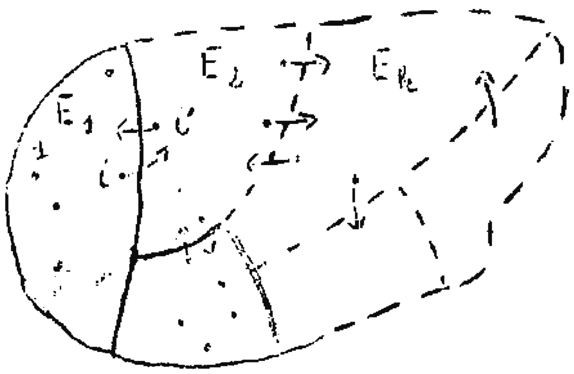
c) On pourrait penser à un indice χ de telle façon que :

$$D_k = \alpha N_k + \beta T_k + x \chi_k$$

Mais au-delà de trois indices partiels, l'élaboration du cadre d'analyse risquerait fort de ressembler à un modèle unidimensionnel où les variables indépendantes concerneraient les critères et la variable dépendante la commune d'accueil. Nous avons montré les limites d'une telle procédure.

2) Etablissement de la partition finale

Une fois la pré-partition obtenue, il convient de regarder si la situation globale peut-être améliorée en modifiant les situations relatives de certains sous-ensembles E_k. Supposons réalisée la pré-partition suivante :



$i \in E_1$

$i' \in E_2$

- Il se peut très bien qu'en ajoutant i' à E_1 et i à E_2 (nous considérons maintenant les sous-ensembles $E_1 + \{i'\} - \{i\}$ et $E_2 + \{i\} - \{i'\}$), on obtienne des situations meilleures relatives à des désutilités plus faibles :

$$D_1 + \{i'\} - \{i\} < D_1$$

et $$D_2 + \{i\} - \{i'\} < D_2$$

- D'autres substitutions peuvent conduire à une situation globale meilleure. Par exemple, l'addition de i à E_2 peut entraîner une diminution de D_2 plus forte en valeur absolue que l'augmentation de D_1 :

$$D_2 - (D_2 + \{i\}) > (D_1 - \{i\}) - D_1$$

De proche en proche les opérations portant sur les communes limitrophes de chaque sous-ensemble modifient la pré-partition pour obtenir finalement une partition sur l'ensemble de départ. Bien évidemment, ces différentes substitutions ne devront pas modifier considérablement la frontière des E_k (principe d'homogénéité de l'espace cadre d'analyse).

La partition finale constitue autant de cadres d'analyse qu'il y a de sous-ensembles.

Remarque : les diverses opérations sont longues, mais elles se décomposent très facilement en un algorithme assez simples. La détermination des plus courts chemins dans un graphe est rendue aisée par l'existence d'algorithmes (1)

2. Les éléments de l'analyse

A) Problématique

1) Préparer l'information nécessaire à la "bonne marche" des modèles demeure une tâche délicate, car les résultats de l'analyse multicritère seront fonction des jugements de valeur portés tout au long des deux étapes : élaboration des critères et détermination de leur importance.

2) Pour que les résultats ne dépendent pas uniquement de l'idée que se fait le chargé d'étude d'une "école idéale", il nous a paru bon d'associer des jurys à la détermination des poids des critères.

3) Mais nous avons montré que cette démarche était peu logique. Et réciproquement, si nous déterminons la pondération de critères élaborés par des jurys (puisque nous bénéficions d'un cadre plus large employons le terme : échantillon).

----

(1) Cf en ce sens le cours du professeur C. PONSARD : "Mathématiques appliquées à l'Economie" DIJON 1971-72 - chapitre 4

Le tableau suivant indique toutes les démarches possibles :

Elaboration critères / Estimation coefficients	échantillon(s)	chargé d'étude
échantillon(s)	démarche logique (1)	démarche peu logique
chargé d'étude	démarche peu logique	démarche logique

La démarche (1) nous apparaît la plus satisfaisante et cela pour trois raisons :

- elle est logique

- objective (par opposition à celle qui résulterait du seul chargé d'étude)

- simultanée (l'élaboration des critères et la détermination des coefficients de pondération procèdent de la même analyse)

En voici les principales étapes :

B) Méthodologie

1) On invite les personnes d'un échantillon $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ à énumérer les critères d'une école qu'elles estiment "idéale". Chaque personne classe et note ses propres critères en fonction de leur importance, peu importe si la hauteur de l'échelle de notation est commune (cf 2)

Tous les critères énumérés sont consignés dans l'ensemble $M = \{1, \ldots, j, \ldots m\}$, et le produit de l'enquête consigné dans le tableau suivant :

N \ M	1 . . .	j	. . . m
1			
.			
.			
.			
i		x_{ij}	
.			
.			
.			
n			

avec :

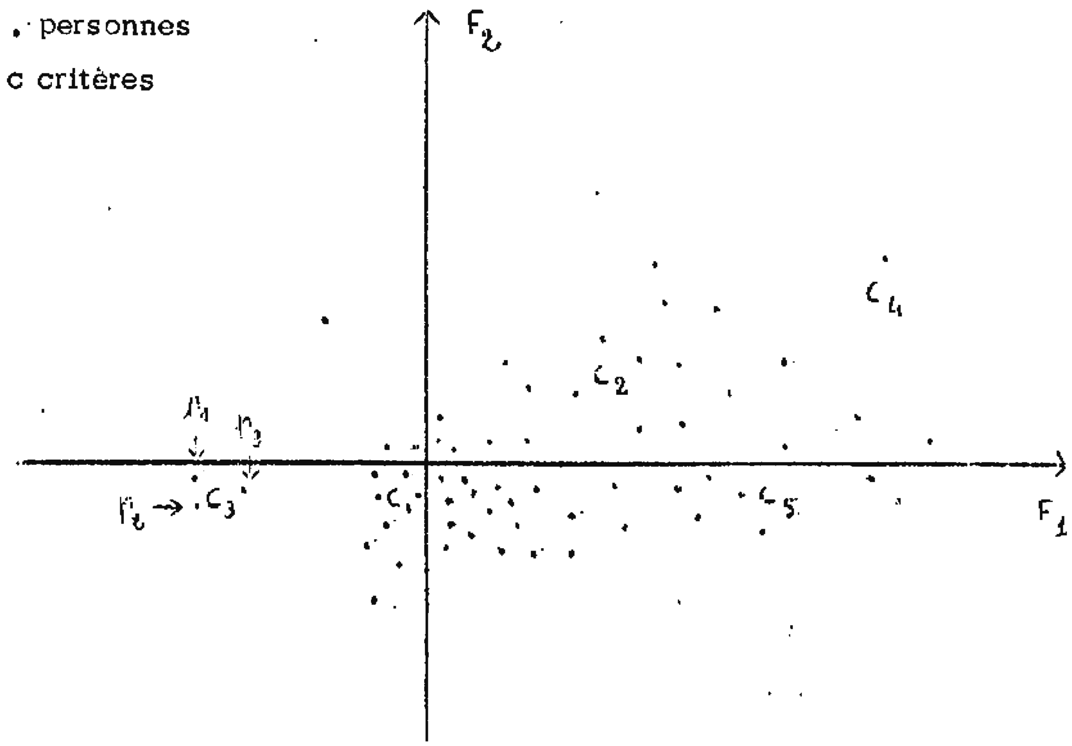
x_{ij} = note de la personne i attribuée au critère j

$x_{ij} = 0$, si le critère j n'est pas contenu dans l'énumération de la personne i

2) L'information contenue dans le tableau ci-dessus est traitée par l'analyse factorielle des correspondances : la seule restriction imposée aux x_{ij}, c'est qu'ils soient positifs ou nuls, peu importe si la personne i possède une échelle de notation plus haute que la personne i', l'analyse factorielle des correspondances en tient compte (cf. chapitre 5).

a) Avant de procéder à l'analyse proprement dite, il convient d'examiner la répartition des données dans le tableau. Si ce dernier présente une partition en bloc, on éliminera les critères j qui sont à l'origine de la non-information ($x_{ij} = 0$ ou faibles par rapport à certaines valeurs contenues dans une ligne i ou une colonne j). Ces critères résultent de la fantaisie ou de l'originalité de quelques personnes interrogées.

b) Les résultats de l'analyse des données relatives aux critères retenus sont représentés dans le plan factoriel constitués par les deux premiers axes. Imaginons la représentation suivante :



Les personnes p_1, p_2, et p_3 sont proches du critère 3 car celui-ci est très bien représenté dans leur profil : le critère C_3 est donc responsable de la proximité entre ces trois personnes. Réciproquement, p_1, p_2 et p_3 sont très bien représentées dans le profil de ce critère : les notes attribuées par ces personnes au critère 3 sont importantes.

La représentation simultanée permet de déterminer rapidement les personnes qui attribuent de l'importance à un critère donné. Ainsi, il est possible de constituer, a postériori, des groupes de jurys.

Il est également possible d'<u>estimer l'importance relative de chaque critère</u> : plus un critère est important plus le nombre des "points-personne" qui lui sont proches est grand.

Un critère sera donc jugé important s'il est la cause de la proximité unissant les différentes personnes d'un même nuage de points (c'est ce nuage que nous appelons "jury"). Dès lors nous pouvons classer les critères de cette façon :

c_1

c_5, c_2

c_3, c_4

Mais ce classement n'apparaît pas rigoureux :

- il résulte d'une simple lecture sur le plan factoriel
- l'importance d'un critère n'est pas traduite par un coefficient numérique

3) Il convient donc <u>d'estimer la valeur des coefficients de pondération</u>. Nous proposons deux solutions.

<u>Première solution</u>

Elle s'inspire du principe exposé au chapitre 5 (section 4) à propos de l'établissement d'un préordre sur l'ensemble des lieux.

Soit $d(c_j, i)$ la distance du point-critère c_j au point-personne i

Nous calculons pour chaque critère la quantité :

$$p'(c_j) = \sum_{i \in N} d(c_j, i)$$

Puis on range les m critères selon les valeurs de p' croissantes, le critère le plus important étant associé à l'expression :

$$\min_{c_j \in M} \left[\sum_{i \in N} d(c_j, i) \right]$$

Dans ces conditions, il semble possible d'estimer le coefficient $p(c_j)$ d'un critère c_j par l'inverse de la quantité $p'(c_j)$:

$$\boxed{p(c_j) = \frac{1}{p'(c_j)}}$$

L'inconvénient de cette méthode est d'ordre théorique car nous savons qu'aucune distance n'a été définie entre éléments d'ensembles différents.

deuxième solution

Il s'agit tout simplement de compter les points-personne d'une même "famille" (ou jury) N (j) proches d'un critère c_j

Sont n (j) le nombre d'éléments de N (j), on rangera les m critères d'après les valeurs de n décroissantes, le critère le plus important est celui pour lequel n (j) est le plus grand.

Le coefficient de pondération $p(c_j)$ du critère c (j) sera estimé par n (j).

$$\boxed{p\,(c_j) = n\,(j)}$$

Comme on peut s'en rendre compte, l'inconvénient ici, est d'ordre pratique car les familles de points N (j) que l'on cherche à former n'apparaissent pas toujours d'une manière évidente sur le plan factoriel.

Cependant l'analyse arborescente (1) pourra pallier cet inconvénient en rendant plus certaine l'appartenance d'une personne i à une famille N (j)

SECTION 2 : L'analyse

Après avoir dit quelques mots sur la préparation de l'analyse, il s'agit maintenant de déterminer la ou les méthode(s) qui conviendrai(en)t le mieux à son déroulement. Autrement dit, pouvons-nous affirmer que certaines de ces méthodes soient plus pertinentes que d'autres ?

---

(1) on emploie quelquefois l'expression : "analyse hiérarchique" pour un exposé détaillé cf la thèse de GROSMANGIN : "construction d'une nomenclature économique d'activité" Fac. Sciences Université de PARIS, ISVP

Pour certains auteurs, "il faudrait, à proprement parler, faire une analyse multicritère sur l'ensemble des analyses multicritères "(1)

Mais si la réponse est élégante, elle reste insuffisante car elle suppose :

- donné l'ensemble des méthodes
- résolu le problème : pour mener une analyse multicritère sur l'ensemble des analyses multicritères, il nous faut une "super-méthode"

Dans un premier paragraphe nous verrons que l'ensemble des méthodes est très vaste. Puis, dans un deuxième paragraphe, nous montrerons qu'il n'existe pas de "super-méthode" absolue.

1. Ensemble des méthodes

A) Les méthodes d'analyse multicritère sont nombreuses

En effet, nous avons vu qu'une méthode d'analyse multicritère pouvait se définir par une application qui, à un m-triple de structures pondérées sur E (ensemble des lieux), fait correspondre une structure unique sur E.

Soit e le cardinal de E, étant donné le nombre c des critères, il existe alors :

$e!^{(e!)^c}$ façons de déduire d'un tableau composé de c <u>ordres</u> complets sur E, un ordre unique sur ce même ensemble (2)

Les quelques méthodes appliquées ici sont des méthodes d'analyse <u>multicritère</u> : selon qu'elles respectent ou non l'intégrité de chaque critère, elles sont multidimensionnelles ou unidimensionnelles, mais toutes considèrent un tableau qui synthétise un ensemble de structures pondérées ce qui justifie l'emploi des termes "analyse multicritère".

---

(1) G. BERNARD et M.L. BESSON p. 54 - RIRO op.cit.
(2) voir l'article de G. KREWERAS : "les décisions collectives" in Mathématiques et Sciences Humaines n° 2 Janvier 1963

Existe--il es méthodes qui ne nécessitent pas l'emploi d'un tel tableau ? Dans l'affirmative nous serions en présence de méthodes d'analyse unicritère.

B) Il existe aussi des méthodes d'analyse unicritère

Exposer ici ces dernières méthodes ne constituent pas seulement une extension du cadre de notre mémoire, mais un débordement puisqu'il s'agissait d'effectuer un regroupement d'écoles par des méthodes multicritères.

Néanmoins l'analyse unicritère peut-être utile à une telle étude surtout lorsque le nombre des éléments à regrouper ne dépasse pas quelques unités.

Nous dirons quelques mots de ces méthodes basées sur la théorie des graphes. Notons qu'elles furent utilisées par Madame GADREAU pour déterminer le leader d'un ensemble de centres de décision (1)

1) Le graphe de domination

a) Soit G le graphe constitué par les sept lieux i de E, et par l'ensemble U des arcs que nous définirons à partir de la relation de domination.

$$G = (E, U)$$

Si le lieu i domine le lieu i', alors l'arc (i,i') appartient à U

La relation de domination possède les propriétés suivantes :

- elle est anti-réflexive :

un lieu i ne peut être dominé par lui-même : les arcs (i,i) n'existent pas, le graphe G est sans boucle (c'est un digraphe)

- elle est anti-symétrique :

si i domine i', bien évidemment i' ne peut pas dominer i : si l'arc (i,i') existe, alors l'arc (i',i) n'existe pas.

---

(1) M. GADREAU "Localisation et Oligopole" pages 74 à 87 Mémoire de DES - Université de DIJON - Octobre 1970

- elle est transitive :

si i domine i' et si i' domine i", alors i domine i" : si l'arc (i,i') existe, de même que l'arc (i,i"), alors l'arc (i,i") existe. En aucun cas nous pourrons avoir la séquence {(i,i'), (i',i"), (i",i)} qui constitue un circuit.

L'absence de tout circuit caractérise G : <u>le digraphe G ne peut pas être fortement connexe</u> (un digraphe est fortement connexe si pour tout sommet i et i' de G, il existe un chemin élémentaire allant de i à i' <u>et</u> un chemin élémentaire allant de i' à i).

b) En pratique G peut être obtenu de la façon suivante :

On constitue une équipe pour aller visiter les différents lieux. Chaque personne se <u>spécialise</u> dans l'appréciation des lieux selon quelques critères seulement : par exemple, l'établissement du préordre sur E en fonction du critère "état de conservation des locaux" serait confié à une personne compétente (architecte...)

Remarquons au passage que la méthode des sommes pondérées ne souffrirait pas d'une telle procédure, bien au contraire, car sur une échelle, les différents lieux se répartiraient avec une plus grande précision : c'est un moyen d'améliorer la notion de proximité.

- Dans les méthodes que nous allons présenter, il n'est pas nécessaire d'établir des préordres sur E.

On demande simplement aux spécialistes de se faire une idée des éléments de E selon certains critères de telle façon qu'un accord suffisant se dégage au sein de l'équipe pour placer un arc entre deux lieux. La notion de domination résulte d'un <u>critère global et subjectif</u>. Mais si l'équipe se compose d'un <u>nombre important de spécialistes</u> (nombre égal à celui des critères) et qu'une <u>règle</u> soit adoptée pour placer un arc dans le graphe de domination (règle de la majorité, par exemple), l'analyse considérée est, à proprement parler, une <u>analyse multicritère</u>.

- Il n'est pas nécessaire, non plus, de placer des arcs entre tous les couples de sommets : <u>on n'impose pas que G soit complet</u> (un graphe est complet si pour tout couple (i,i') de sommets, l'un au moins des couples (i,i') et i',i) appartient à U). Tout comme dans le graphe de surclassement d'ELECTRE-I, si l'on veut obtenir un graphe de domination riche en arcs il convient d'atténuer la sévérité de la règle d'accord.

- Contrairement à la relation de surclassement d'ELECTRE-I, la relation de domination de G est transitive ce qui implique l'absence de tout circuit dans G. Cette propriété est très gênante car il ne suffit pas de supposer que l'équipe adopte un comportement rationnel.

En effet, nous avons vu (2è partie : ch. 2) que la préférence collective définie par la majorité n'est pas toujours transitive : si l'accord des spécialistes est suffisant pour que i "domine" i' et i' "domine" i", il n'en découle pas nécessairement un accord suffisant pour que i "domine" i". Il se peut même que i" "domine" i : dans ce cas on obtient un circuit qui est la représentation graphique de l'effet Condorcet.

Précisons toutefois que cet effet Condorcet est assez rare en pratique (1). Dans une telle éventualité on pourrait faire appel à la "bonne volonté" des spécialistes afin de sauvegarder cette règle cartésienne et astreignante (ce qui équivaut à adopter une règle de type dictatorial : cf. conclusion du ch. 2 - 2è partie).

2) Procédés de résolution

Supposons le graphe de domination G donné. Il convient de choisir la commune d'accueil. Comment ? Nous proposons deux types de méthode.

a) Les méthodes basées sur la notion d'écart

On appelle écart entre deux sommets i et i' la longueur du chemin élémentaire minimum allant de i à i' (la longueur d'un chemin est le nombre d'arcs de ce chemin).

L'écart maximum d'un sommet donné i à un sommet du graphe G est appelé écartement. L'écart maximum d'un sommet du graphe au sommet donné i est appelée anti-écartement

---

(1) cf. l'article de G. KREWCRAS page 28 - op. cit.

Dans ces conditions la commune d'accueil serait représentée par le sommet qui :

- domine le plus "facilement" tous les autres lieux : notion d'écartement, on choisirait le sommet qui possède l'écartement le plus faible. Ce sommet est appelé <u>centre</u>.

- est dominé le plus "facilement" par les autres lieux : notion d'anti-écartement, on choisirait le sommet qui possède l'anti-écartement le plus grand. Ce sommet est appelé <u>point anti-périphérique</u>.

Bien évidemment ce serait un pur hasard si la commune d'accueil pouvait satisfaire ces deux conditions à la fois. Disons tout simplement qu'il est possible de trouver un sommet qui se rapproche le plus de ces deux conditions, la théorie des graphes est suffisamment riche pour qu'on puisse s'orienter dans une telle voie. A cet effet on pourrait penser aux notions suivantes :

- centralité absolue
- centralité relative
- statut, contre-statut
- ....

Ces notions ont été plus particulièrement développées par :

- F. HARARY, R. NORMAN et D. CARTWRIGHT : "Introduction à la théorie des graphes orientés - Modèles structuraux" - pages 167 à 175

- A. BAVELAS : "Communication Patterns in task - Oriented Groups" - Soc. Amer 1950 - pages 725 à 730

Remarque : on ne devra pas oublier que le graphe de domination n'est pas fortement connexe : si on ne peut pas se rendre de i à i' on ne pourra pas affirmer que i domine "globalement" tous les autres lieux.

b) Les méthodes basées sur le dénombrement des différents niveaux dans un ensemble d'éléments

Le principe est le suivant : un individu sera d'autant mieux placé dans l'échelle hiérarchique d'une organisation, que le nombre de ses supérieurs sera plus faible.

On fera donc apparaître un ou plusieurs sommet(s) non dominé(s). D'une façon générale, les algorithmes seront basés sur le même principe de marquage successif des sommets sans ascendants (non dominés) pris parmi l'ensemble des sommets non encore marqués. Nous pouvons citer deux méthodes :

- fonction ordinale d'un graphe sans circuit (rappelons que notre graphe de domination est sans circuit) : on pourra se reporter à l'ouvrage de A. KAUFMAN : "introduction à la combinatorique en vue des applications" - page 221 à 225.

- ensemble de potentiels : on consultera l'ouvrage de HARARY NORMAN et GARTWRIGHT déjà cité - page 281 à 290, ou celui de B. ROY : "Algèbre moderne et théorie des graphes" tome 2 - Chapitre 8 - Section B

En conclusion, il paraît important de rappeler que ces méthodes peuvent servir à une analyse multicritère lorsque plusieurs personnes sont à l'origine du graphe de domination.

Au contraire, lorsque l'équipe se réduit à un seul élément, le chargé d'étude, nous somme en présence de méthodes d'analyse unicritère où les différents points de vue s'agrègent dans son esprit.

De toute façon l'emploi de ces méthodes reste très simple : l'application de l'une quelconque d'entre elles ne demande jamais plus de quelques minutes lorsque le nombre des lieux est faible.

2. Le choix d'une méthode dépend de la nature de l'étude considérée

Supposons donné l'ensemble des lieux à regrouper (cadre de l'analyse), nous pouvons alors proposer la démarche suivante :

A) On demande au chargé d'étude de proposer une commune d'accueil le plus rapidement possible. A cet effet il utilisera une méthode d'analyse unicritère. Son travail sera très simplifié :

- visite des différents lieux
- établissement du graphe de domination et résolution

B) Supposons maintenant que le chargé d'étude possède et le temps et les moyens financiers. Dans ce cas, la visite des différents lieux devra s'accompagner d'une préparation minutieuse de l'analyse afin de présenter un tableau qui synthétise l'information relative aux lieux selon les multicritères pondérés.

1) Si le tableau présente une partition en bloc nous savons qu'il suffit d'utiliser la méthode la plus simple (cf. conclusion du chapitre 5)

2) Si le tableau ne présente pas de partition en bloc, mais que le nombre des critères soit faible, nous sommes ramenés au cas 1) (cf. conclusion du chapitre 5)

3) Dans la mesure où le nombre des critères est élevé, ainsi que celui des lieux et à condition que le tableau ne présente pas une partition en bloc, la méthode à utiliser dépendra des critères suivants :

- précision
- rapidité
- présentation des résultats (préordre, ordre, noyau...)
- etc...

B I B L I O G R A P H I E

I - SUR LA PREPARATION DE L'ANALYSE ....

A. - Ouvrages et Etudes ....

(1) CAPELLE (J) : "L'Ecole de demain reste à faire".........
(2) CHATELIN : "Principes de l'Education nouvelle"..........
(3) CREMIEUX-BRILHAC (J.L) : "L'Education nationale"........
(4) CUENIN (S), CLERC (D) et ORIVEL (F) : "Rapport sur un regroupement systématique des écoles primaires rurales". - Institut d'Economie Régionale (2 vol.) Dijon 1968...
(5) FERRIERE : "Ecole active"...............................

B. - Articles ....

(6) ANTOINE (J) et ROY (B) : "Les techniques préparatoires de la décision, intérêt et limites". - Revue Projet, Mars 1969...
(7) ATKINS (R.M) : "A Program for locating the New Plant". - Harward Business Review, Nov.-Déc. 1952............
(8) BERNARD (G) et BESSON (M.L) : "Douze méthodes d'analyse multicritère". - Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, n° V.3, 1971.......
(9) BERTIER (P) et de MONTGOLFIER (J) : "Comment choisir en tenant compte de points de vue non commensurables". - Analyse et Prévision, 1971.............
(10) GUIGOU (J.L) : "Des progrès dans la recherche de la localisation optimale (le modèle de M. Cl. Ponsard et l'utilisation du programme ELECTRE I". - Paris, CETEM 1970..
(11) ROY (B) : "Méthode ELECTRE I". - Direction scientifique de la SEMA, Synthèse et Formation n° 50...........

II - SUR L'ANALYSE..

A. - Ouvrages et Notes de cours...........................

1) Généralités.

(12) BARBUT (M) : "Mathématiques des sciences humaines". Tome 1...
(13) BROSS : "Design for decision"........................

(14) - KAUFMAN A : "Des points et des flèches....la théorie des graphes..................................
(15) - PONSARD C : "Mathématiques appliquées à l'économie" notes de cours 1971-72. Université de Dijon.....
(16) - ROY B : "Algèbre moderne et théorie des graphes" Dunod, tomes 1 et 2..........................

2) Méthodologie,..........................

(17) - GADREAU M : "Localisation et oligopole" Mémoire de D.E.S. Université Dijon, octobre 1970..........
(18) - GUIGOU J. L. : "Théorie Economique et Transformation de l'Espace Agricole". Thèse. Techniques économiques modernes. Série espace économique n°14.
(19) - GUIGOU J. L. : "Analyse Economique et Analyse Multidimensionnelle". Thèse complémentaire (à paraître)....................................
(20) - HARARY F, NORMAN R. et CARTWRIGHT D : "Introduction à la théorie des graphes orientés. Modèles Structuraux"..
(21) - KAUFMAN A : "Introduction à la combinatorique en vue des applications"..............................
(22) - LEBART et FENELON : "Statistique et informatique appliquées"...................................
Voir aussi la référence (16) tome 1

B - Articles...................................

(23) - BALLADUR J. P. : "Analyse factorielle des correspondances". Annales de l'I.N.S.E.E. n° 4 1970...
(24) - BAVELAS A. : "Communication Patterns in tasd Oriented Groups". Soc. Amer. 1950......................
(25) - BENAYOUN R, ROY B, SUSSMANN B. : "Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples (ELECTRE- I)" note de travail n° 49...
(26) - BUFFET P, GREMY J.P, MARC M, SUSSMANN B. : "Peut-on choisir en tenant compte de critères multiples ? Une méthode (ELECTRE- I)" et trois applications" Revue Metra, Vol. VI, n° 2 - 1967..............
(27) - EILON S. : "What is a decicion ?" Management Science, Vol. 16. dec 1969....................
(28) - MARC M. : "L'application du modèle de recherche opérationnelle SCAL". Octobre 1966................
(29) - ROY B. : "Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)". Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle n° 8. Mars/Avril 1968..............
(30) - KREWERAS : "Les décisions collectives" Mathématiques et Sciences Humaines n° 2, janvier 1963. Voir aussi les références (8), (10) et (11).........

TABLE DES MATIERES

Deuxième Partie

L'ANALYSE

CHAPITRE 5 : L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES